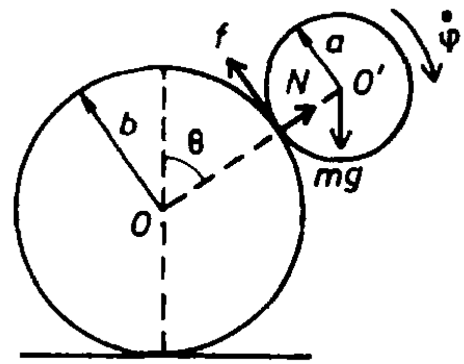
JAWABAN SOAL FISIKA   OSN 2010

Medan, 1 – 7 Agustus 2010

1- Gaya-gaya yang bekerja pada bola ditunjukkan pada gambar disamping. Persamaan gerak untuk pusat massa bola adalah

$$m\,(a+b)\,\alpha_\theta = mg\sin\theta - f \qquad (1)$$

$$m\,(a+b)\omega_\theta^2 = mg\cos\theta - N \qquad (2)$$



dan pada bola yang berotasi berlaku

$$\tfrac{2}{5}\,m\,a^2\,\alpha_\varphi = fa \qquad (3)$$

Syarat agar bola menggelinding tanpa slip

$$(a+b)\,\omega_\theta = a\,\omega_\varphi \quad \text{atau} \quad (a+b)\,\alpha_\theta = a\,\alpha_\varphi \qquad (4)$$

(nilai 4)

Dari (3) dan (4) kita dapatkan

$$f = \frac{2}{5}\,m\,(a+b)\,\alpha_\theta$$

Substitusikan ke (1), kita dapatkan

$$\alpha_\theta = \frac{5\,g\sin\theta}{7\,(a+b)}$$

(nilai 2)

(a) Karena pada $t=0$ nilai $\theta = \omega_\theta = 0$ dan $\alpha_\theta = \frac{1}{2}\frac{d\dot\theta^2}{d\theta}$, maka

$$\omega_\theta^2 = \frac{10\,g\,(1-\cos\theta)}{7\,(a+b)}$$

Substitusikan ia ke (2) akan memberikan

$$N = mg\cos\theta - \frac{10}{7}\,mg\,(1-\cos\theta) = mg\left(\frac{17\cos\theta}{7} - \frac{10}{7}\right)$$

Setelah bola meninggalkan silinder, $N = 0$. Sehingga $\theta = \theta_{max}$ dan

$$\cos\theta_{max} = \frac{10}{17}$$

(nilai 5)

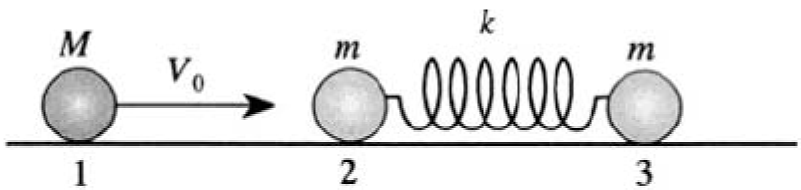
(b) Pada saat bola meninggalkan silinder, besarnya kecepatan pusat bola adalah

$$v = (a+b)\,\omega_\theta = \sqrt{\frac{10}{17}\,g(a+b)}$$

dan arahnya sejajar dengan arah tangensial pada titik dimana $\theta = \theta_{max}$. **(nilai 4)**

2- Jawaban:

a) Untuk memudahkan kita sebut saja bola massa *M* sebagai bola 1, bola yang ditumbuk pada sistem dua bola sebagai bola 2, dan bola satunya lagi sebagai bola 3 (lihat gambar bawah). Setelah tumbukan yang pertama, bola 1 akan bergerak dengan kecepatan konstan V_1 sedangkan bola 2 and 3 akan berosilasi. Untuk tumbukan lain yang terjadi, koordinat bola 1 dan bola 2 harus sama. Pertama tentukan dulu V_1 setelah tumbukan awal, perhatikan tumbukan hanya sesaat. Kemudian perlakukan tumbukan ini sama dengan tumbukan hanya antar dua bola massa *M dan m* saja. Jika kecepatan bola pertama sebelum tumbukan adalah V_0 maka kita dapat menentukan V_1 and V_2 dari persamaan kekekalan energi dan kekekalan momentum:



$$MV_0 = MV_1 + mV_2 \quad (1)$$

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} \quad (2)$$

Kemudian dari substitusi (1) ke (2) kita juga dapatkan bahwa

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m}V_0 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}V_0 \quad (3)$$

$$V_2 = \frac{2M}{M+m}V_0 = \frac{2}{1+\gamma}V_0 \quad (4)$$

$$\gamma \equiv \frac{m}{M}$$

Setelah tumbukan bola pertama *M* akan bergerak dengan kecepatan konstan V_1 maka koordinat posisinya adalah

$$x_1 = V_1 t = V_0 t\,(1-\gamma)/(1+\gamma).$$ **(nilai 4)**

Pusat massa bola 2 dan 3 juga akan bergerak dengan kecepatan konstan $V_c = V_2/2$ (karena $m_2 = m_3 = m$). Dengan demikian dari persamaam (4) kita dapatkan

$$x_c = \frac{V_0}{1+\gamma}\,.\,t$$ **(nilai 2)**

Sekarang kita lihat dalam kerangka pusat massa bola 2 dan 3. Kedua bola masing-masingnya bergerak ke arah salah satu lainnya dengan laju dan posisinya memenuhi persamaan osilasi relatif terhadap pusat massanya sebagai fungsi waktu yang berbentuk:

$$x_{2,3}(t) = A\sin\omega t$$

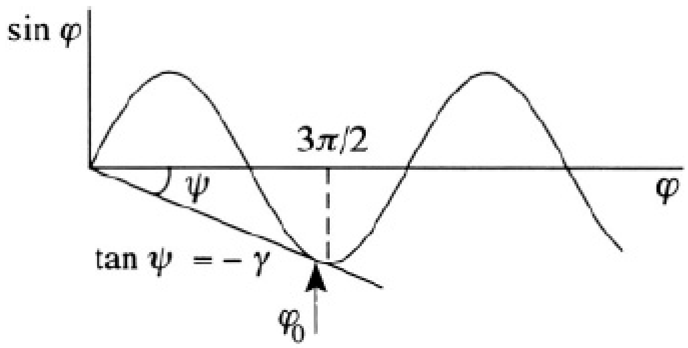
dengan $\omega = \sqrt{k'/m}$ dan *k'* adalah konstanta pegas yang setengah pegas, $k' = 2k$. Dari hukum kekekalan energi, energi mula-mula massa 2 dalam kerangka pusat massa berubah menjadi energi deformasi pegas dengan suatu amplitudo yang berkorelasi dengan perubahan kecepatan dari $V_2/2$ menjadi nol:

$$\frac{m\,(V_2/2)^2}{2} = \frac{m\,V_0^2}{2\,(1+\gamma)^2} = \frac{k'A^2}{2}$$

Jadi $$A = \sqrt{m\,V_0^2/k'(1+\gamma)^2} = \frac{V_0}{(1+\gamma)\omega}$$

Dalam kerangka lab

$$x_2\,(t) = x_c\,(t) + A\sin\omega\,t = \frac{V_0\,t}{1+\gamma} + \frac{V_0}{(1+\gamma)\,\omega}\sin\omega\,t$$



(**nilai 2**)

Untuk tumbukan yang kedua kalinya, kita perlukan $x_1 = x_2$ atau,

$$\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\;V_0\,t = \frac{V_0\,t}{1+\gamma}\left(1+\frac{\sin\omega\,t}{\omega\,t}\right) \qquad (5)$$

Maka kita dapatkan,

$$\frac{\sin\omega\,t}{\omega\,t} \equiv \frac{\sin\varphi}{\varphi} = -\gamma \qquad (6)$$

Untuk menyelesaikan pers (6) diatas, cara termudah adalah dengan menggunakan grafik diatas. Untuk solusi yang eksis kita dapatkan suatu kondisi $\gamma \leq \gamma_{max}$, dengan

$$\gamma_{max} \approx \frac{1}{3\pi/2} \approx 0{,}2$$

pada $\varphi_0 \approx 3\pi/2$. Harga minimum massa $M \approx \frac{m}{\gamma_{max}} \approx 10\,kg$. (**nilai 3**)

b) Waktu antar tumbukan adalah:

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{\omega} \approx \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k'}}$$
$$= \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} \approx 5\;s$$

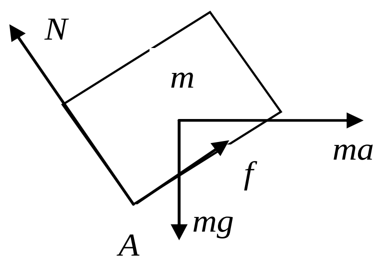
(**nilai 4**)

3- Agar balok bisa bergerak bersama-sama bidang miring dan tidak bergerak translasi ke atas maupun ke bawah, maka dengan mengggunakan Hukum I dan II Newton dipenuhi persyaratan,

$$(M+m)\left(\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}\right)g \le F \le (M+m)\left(\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}\right)g \qquad (1)$$ **(nilai 10)**

Untuk gerak rotasi nalok kita gunakan Hukum I Newton dalam torsi, yaitu $\sum\vec{\tau}=0$.

Apabila balok cenderung menggelinding ke bawah, maka



Torsi terhadap titik A:

$$mg\sin\theta\left(\tfrac{1}{2}t\right)-ma\cos\theta\left(\tfrac{1}{2}t\right)-\left(mg\cos\theta+ma\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{2}l\right)=0 \quad \text{atau}$$

$$a=\left(\frac{t\sin\theta-l\cos\theta}{t\cos\theta+l\sin\theta}\right)g$$

Dengan mensubstitusikan pertidaksamaan

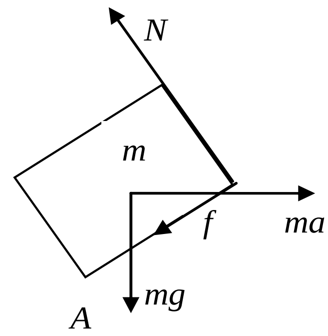
$a \ge \left(\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}\right)g$ (dari syarat agar balok tidak bertranslasi ke bawah) ke dalam (2), diperoleh

$$\left(\frac{t\sin\theta-l\cos\theta}{t\cos\theta+l\sin\theta}\right) \ge \left(\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}\right) \qquad (3)$$

sehingga diperoleh

$$\mu_s \ge \frac{l}{t} \qquad (4)$$ **(nilai 5)**

Apabila balok cenderung menggelinding ke atas, maka



Torsi terhadap titik A:

$$mg\sin\theta\left(\tfrac{1}{2}t\right)-ma\cos\theta\left(\tfrac{1}{2}t\right)+\left(mg\cos\theta+ma\sin\theta\right)\left(\tfrac{1}{2}l\right)=0$$ atau

$$a=\left(\frac{t\sin\theta+l\cos\theta}{t\cos\theta-l\sin\theta}\right)g \qquad (2)$$

Dengan mensubstitusikan pertidaksamaan

$a\le\left(\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}\right)g$ (yang merupakan syarat agar balok tidak bertranslasi ke atas) ke dalam persamaan (2) diatas, diperoleh

$$\left(\frac{t\sin\theta+l\cos\theta}{t\cos\theta-l\sin\theta}\right)\le\left(\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}\right) \qquad (5)$$ **(nilai 3)**

sehingga diperoleh kembali (4).

Jadi persyaratan agar balok bergerak bersama-sama bidang miring adalah:

$$\left(M+m\right)\left(\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}\right)g\le F\le\left(M+m\right)\left(\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}\right)g$$

Dan syarat agar balok tidak menggelinding maka $\mu_s\ge\frac{l}{t}$ **(nilai 2)**

4- Jawaban

a- Kecepatan tangensial:

$$v_t(r,t) = \omega\, r + V \sin \omega t$$ (suku-1 dari rotasi, suku-2 dari revolusi)

(nilai 2)

b- Gaya angkat per satuan panjang: $f(r,t) = c\omega r + cV \sin \omega t$

Gaya angkat rata-rata per satuan panjang pada sayap-1:

$$\bar{f}_1 = \frac{f(0,t) + f(b,t)}{2} = \frac{c\omega.0 + cV \sin \omega t + c\omega b + cV \sin \omega t}{2} = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin \omega t$$

Dari sayap ke sayap berbeda sudut fase $\pi/2$. Maka

Pada sayap-2: $$\bar{f}_2 = \frac{1}{2} c\omega b + cV \sin(\omega\, t + \pi/2) = \frac{1}{2} c\omega\, b + cV \cos \omega\, t$$

Pada sayap-3: $$\bar{f}_3 = \frac{1}{2} c\omega\, b + cV \sin(\omega\, t + \pi) = \frac{1}{2} c\omega\, b - cV \sin \omega\, t$$

Pada sayap-4: $$\bar{f}_4 = \frac{1}{2} c\omega\, b + cV \sin(\omega t + 3\pi/2) = \frac{1}{2} c\omega\, b - cV \cos \omega\, t$$

Gaya angkat rata-rata per satuan panjang total: $\bar{f}_{tot} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 + \bar{f}_4 = 2c\omega\, b$

Gaya angkat total: $F = \bar{f}_{tot} b = 2c\omega\, b^2$ **(nilai 4)**

c- Momen gaya per satuan panjang: $\vec{n}(r,t) = \vec{r} \times \vec{f}(r,t)$

Misalkan arah $\vec{f}(r,t)$ pada sumbu-*x* sehingga: $\vec{f}(r,t) = \hat{x}(\omega\, r + cV \sin \omega\, t)$

dan $\vec{r}$ pada bidang-*yz* sehingga: $\vec{r} = \hat{y} r \cos \omega\, t + \hat{z} r \sin \omega\, t$

sehingga momen gaya per satuan panjang pada sayap-1

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (\hat{y} r \cos \omega\, t + \hat{z} r \sin \omega\, t) \times \hat{x}(\omega\, r + cV \sin \omega\, t) \\ &= -\hat{z} r \cos \omega\, t(\omega\, r + cV \sin \omega\, t) + \hat{y} r \sin \omega\, t(\omega\, r + cV \sin \omega\, t) \end{aligned}$$

Pada sayap-2: $$\vec{n}_2 = \hat{z} r \sin \omega\, t(\omega\, r + cV \cos \omega\, t) + \hat{y} r \cos \omega\, t(\omega\, r + cV \cos \omega\, t)$$

Pada sayap-3: $$\vec{n}_3 = \hat{z} r \cos \omega\, t(\omega\, r - cV \sin \omega\, t) - \hat{y} r \sin \omega\, t(\omega\, r - cV \sin \omega\, t)$$

Pada sayap-4: $$\vec{n}_4 = -\hat{z} r \sin \omega\, t(\omega\, r - cV \cos \omega\, t) - \hat{y} r \cos \omega\, t(\omega\, r - cV \cos \omega\, t)$$

Momen gaya per satuan panjang total: $\vec{n}_{tot} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \hat{y}2cVr$

Besar momen gaya rata-rata per satuan panjang: $\bar{n} = \dfrac{0 + 2cVb}{2} = cVb$

Momen gaya total: $\vec{N} = \hat{y}\bar{n}b = \hat{y}cVb^2$ (**nilai 5**)

d- Momentum angular rotasi: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Momen inersia bumerang: $I = 4\dfrac{1}{3}(M/4)b^2 = \dfrac{1}{3}Mb^2$

maka $L = \dfrac{1}{3}Mb^2\omega$ (**nilai 2**)

e- Kecepatan sudut revolusi: $\omega_0 = \dfrac{N}{L} = \dfrac{cVb^2}{\frac{1}{3}Mb^2\omega} = \dfrac{3cV}{M\omega}$ (**nilai 2**)

f- Jari-jari revolusi: $V = \omega_0 R \rightarrow R = \dfrac{V}{\omega_0} = \dfrac{V}{3cV/M\omega} = \dfrac{M\omega}{3c}$

(**nilai 2**)

g- Gaya total = gaya sentripetal, sehingga:

$$F = \frac{MV^2}{R} \quad \rightarrow \quad 2c\omega b^2 = \frac{MV^2}{R} \quad \rightarrow$$

$$V^2 = \frac{2c\omega b^2}{M}\frac{M\omega}{3c} = \frac{2}{3}\omega^2 b^2 \quad \rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \omega b$$

(**nilai 3**)

5- Jawaban

a- Pendekatan jarak *d* kecil dibandingkan dengan radius rata *R* silinder berarti bahwa kita dapat menggunakan pendekatan plat sejajar untuk menghitung kapasitas kapasitor karena luas elektroda (*A*) tidak jauh berbeda.

$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ atau $C_0 = \frac{\varepsilon_0 2\pi R l}{d}$ (nilai 5)

b- Energi yang disimpan sebelum air masuk:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

$U_0 = \frac{\varepsilon_0 2\pi R l}{2d} V^2$ → $U_0 = \frac{\varepsilon_0 \pi R l V^2}{d}$ (nilai 3)

c- Setelah air masuk, kapasitas kapasitor menjadi:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi R h}{d} + \frac{\varepsilon_0 2\pi R(l-h)}{d}$$

$C = \frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d}\{l + (\varepsilon - 1)h\}$ (nilai 3)

d- Energi total termasuk gravitasi dapat dituliskan:

$U = \frac{1}{2} C V^2 + mg\frac{h}{2}$ (nilai 2)

(anggap air homogen, sehingga pusat massa berada pada *h*/2)

Masukkan *C* dan *m* (=kerapatan x volume) yang ada, diperoleh:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 2\pi R}{d}\{l + (\varepsilon - 1)h\}V^2 + \rho(2\pi R h d)g\frac{h}{2}$$

atau (nilai 2)

$$U = \frac{\varepsilon_0 \pi R}{d}\{l + (\varepsilon - 1)h\}V^2 + \rho(\pi R d)gh^2$$

Energi ini minimum bila $\frac{dU}{dh} = 0$ atau (nilai 2)

$$\frac{\varepsilon_0 \pi R}{d}(\varepsilon - 1)V^2 + 2\rho(\pi R d)gh = 0$$

$$\frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon - 1)V^2 + 2\rho d g h = 0$$

$h = \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}{2\rho g d^2} V^2$ (nilai 3)