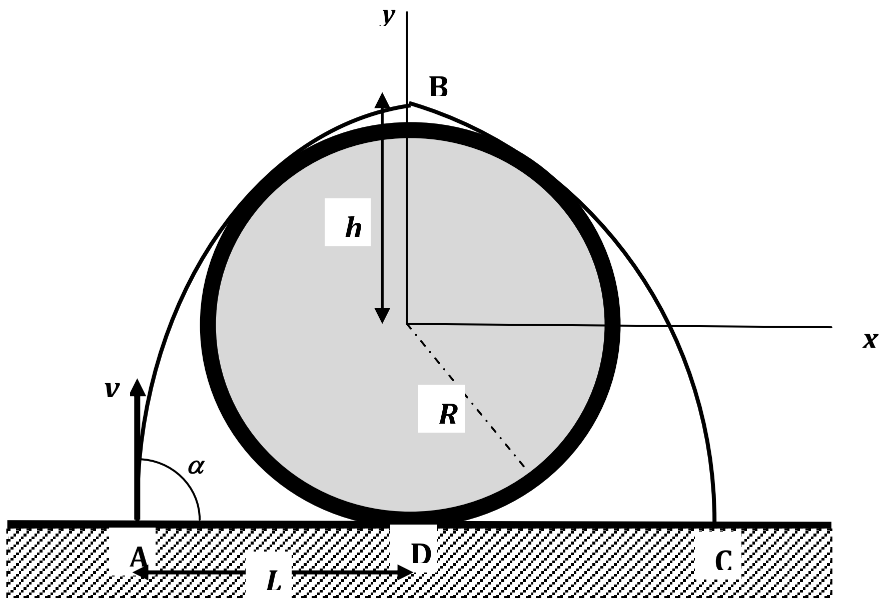
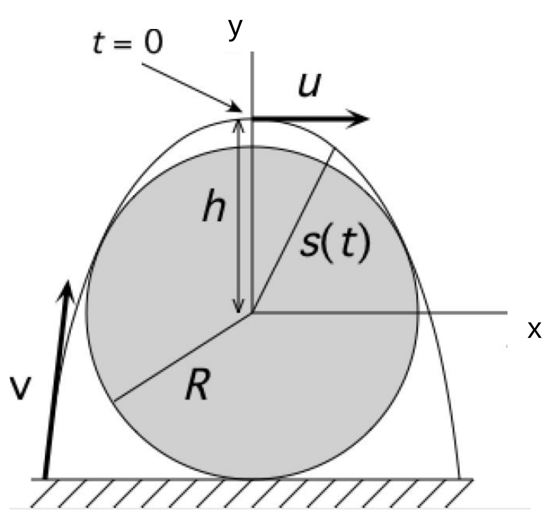
1- (***20 poin***) Sebuah pipa silinder yang sangat besar (dengan penampang lintang berbentuk lingkaran berjari-jari R) terletak di atas tanah. Seorang anak ingin melempar sebuah bola tenis dari titik A sehingga dapat melewati pipa silinder tersebut untuk akhirnya jatuh di titik C tanpa terjadi tumbukan maupun pantulan dengan dinding pipa. Tujuan tersebut dapat dicapai dengan mengatur besar dan arah kecepatan pelemparan ($\mathbf{v}$) sedemikian rupa dengan sudut elevasi (α) tertentu. Tampak dengan jelas bahwa tinggi puncak lintasan B yang diukur dari titik pusat pipa silinder hanya diperkenankan mencapai satu nilai maksimum $h = h_{maks}$ agar lintasan bola tepat hanya menyinggung permukaan pipa (lihat gambar), yaitu dengan kondisi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{min}$ dan $\alpha = \alpha_{min}$. Abaikan gesekan udara. Tentukan:



a) besar kelajuan pelemparan v sebagai fungsi h.
b) besar h_{maks} .
c) besar $\mathbf{v}_{min}$ dan α_{min}.
d) besar L, yaitu jarak lokasi titik pelemparan (titik A) dari titik singgung pipa dengan tanah (titik D) yang menjamin bola sampai ke titik C sebagaimana dipersyaratkan di atas.

Jawaban:



(a)- Ditinjau dari titik puncak B, persamaan parabola dari gerak bola tenis adalah

Arah vertikal: $y = h - ½\, gt^2$ (**1 poin**)

Arah horizontal: $x = v \cos\theta\, t = u\, t =$ konstan (**1 poin**)

Persamaan penampang silinder pipa:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \textbf{(1 poin)}$$

di titik singgung parabola dan permukaan pipa berlaku hubungan:

$$R^2 = x^2 + y^2 = (ut)^2 + (h - \tfrac{1}{2} gt^2)^2 \qquad (1) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

dan bila kita uraikan akan diperoleh persamaan kuadrat dalam t^2 , berbentuk

$$\frac{g^2}{4} t^4 + (u^2 - gh)t^2 + (h^2 - R^2) = 0 \qquad (2)$$

Karena lintasan bola tenis menyinggung/menyentuh permukaan pipa maka nilai diskriminannya sama dengan nol, yaitu

$$(u^2 - gh)^2 - g^2(h^2 - R^2) = 0 \qquad (3) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

yang tidak lain adalah persamaan kuadrat dalam u^2 yang memiliki dua akar/penyelesaian yaitu $u^2 = g\,(h \pm \sqrt{h^2 - R^2})$. Tetapi akar dengan tanda positif (+) tidak digunakan karena kalau ia disubstitusi kembali kedalam persamaan (2) maka tidak ada solusi untuk $h > R$. **(1 poin)**

Akhirnya dengan menggunakan hukum kekekalan energi diperoleh besar kelajuan pelemparan v (h), yaitu

$$v^2(h) = u^2 + 2g(h + R) = g(3h + 2R - \sqrt{h^2 - R^2}) \qquad (4) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

(b)- Agar diperoleh v yang minimum maka berlaku $\left.\frac{dv^2(h)}{dh}\right|_{h_{maks}} = 0$ **(2 poin)**

$$g\left(3 - \frac{h_{maks}}{\sqrt{h_{maks}{}^2 - R^2}}\right) = 0 \qquad \text{sehingga diperoleh} \qquad h_{maks} = \frac{3}{2\sqrt{2}} R = 1{,}061R\,. \qquad \textbf{(2 poin)}$$

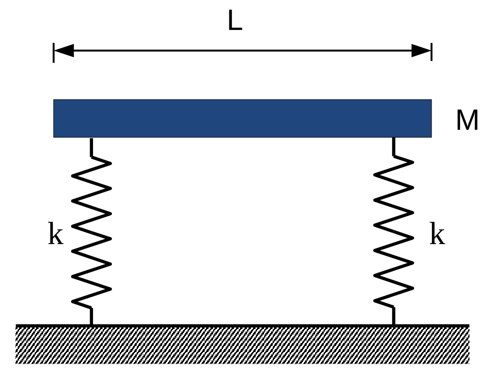
(c)- Besarnya kecepatan minimum dari pelemparan bola tenis berikut sudut elevasinya adalah

$$v_{\min} = \sqrt{2 + \sqrt{8}}\ \sqrt{gR} \approx 2{,}197\sqrt{gR} \qquad \text{dan} \qquad \alpha_{\min} = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2(2 + \sqrt{2}}}\right) = 67{,}5^{o} \qquad \textbf{(4 poin)}$$

(d)- Dan akhirnya jarak lokasi titik pelemparan (titik A) dari titik singgung pipa dengan tanah (titik D) yang menjamin bola sampai ke titik C adalah

$$L = \left(\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}}\right) R \approx 1{,}71R \qquad \textbf{(3 poin)}$$

2- (***12 poin***) Sebuah batang homogen $M = \lambda L$ dengan M, L dan λ masing-masing adalah massa batang, panjang batang dan kerapatan massa batang. Batang itu ditopang oleh dua buah pegas identik dengan konstanta pegas k, pada jarak x dari lantai. Jika pada ujung batang sebelah kiri diberi simpangan kecil, kemudian setelah itu dilepas. Ada dua modus vibrasi dari sistem ini, yaitu (1) masing-masing ujung batang bervibrasi secara bersamaan, dan (2) kedua ujung batang bervibrasi secara berlawanan, ujung kiri bervibrasi ke atas dan ujung kanan bervibrasi ke bawah (dan juga sebaliknya).



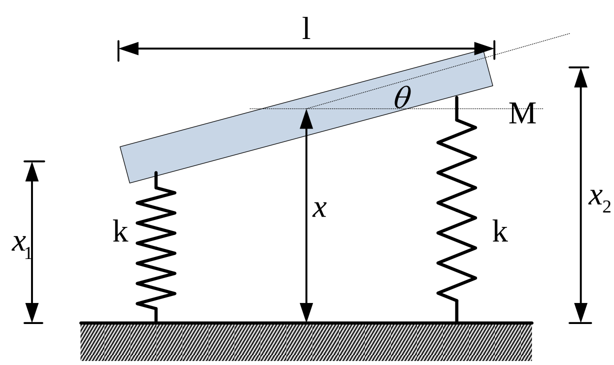
Tentukan:

a) frekuensi vibrasi dari kedua modus tersebut.

b) frekuensi vibrasi dari kedua modus tersebut, jika di ujung batang itu ditempeli sebuah benda bermassa m dan diperlakukan sama seperti sebelumnya (diberi simpangan kecil).

***Jawaban*:**

a. Untuk ujung batang sebelah kiri diberi simpangan sebesar b, seperti pada gambar



Jika batang itu bervibrasi secara bersamaan → modus 1,

maka berdasarkan hukum Newton II: $M\ddot{x} = -k(x_1 - b) - k(x_2 - b)$ (**2 poin**)

dan gunakan suatu kondisi bahwa $x_1 = x - b$ dan $x_2 = x + b$

Sehingga: $\ddot{x} = -\dfrac{2k}{M}(x - b)$ (**1 poin**)

Persamaan ini adalah GHS, dengan solusi $x = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

dengan $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{M}}$ (**1 poin**)

Jika batang tidak bervibrasi bersamaan → modus 2; maka akan ada torsi.

Untuk simpangan θ kecil, gunakan $x_1 = x - \frac{1}{2}L\theta$ dan $x_2 = x + \frac{1}{2}L\theta$

Persamaan torsi:

$$I\ddot{\theta} = -k(x_2 - b)\frac{L}{2} + k(x_1 - b)\frac{L}{2} = -\frac{kL}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}kL^2\theta$$

(**2 poin**)

dengan $I = \frac{1}{12}ML^2$

Sehingga $\ddot{\theta} = -\frac{6k}{M}\theta$ → Persamaan GHS (**1 poin**)

dengan $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{M}}$ (**1 poin**)

b. Jika ada beban kecil, batang masih bervibrasi secara bersamaan → modus 1.
Koreksi pada hukum Newton II, hanya pada massa sehingga Persamaan GHS berubah menjadi

$\ddot{x} = -\frac{2k}{M+m}\left(x-b\right)$, akibatnya $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M+m}}$ (**2 poin**)

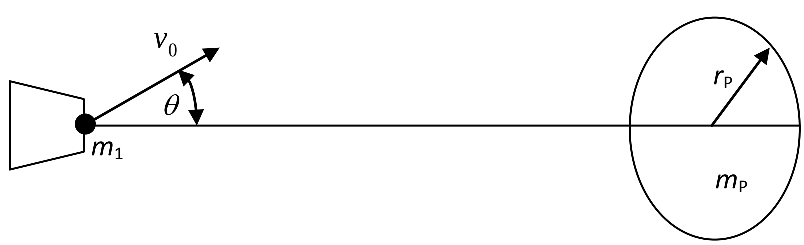
Sebaliknya untuk modus 2,

ada koreksinya pada momen inersia $I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}mL^2$, (**1 poin**)

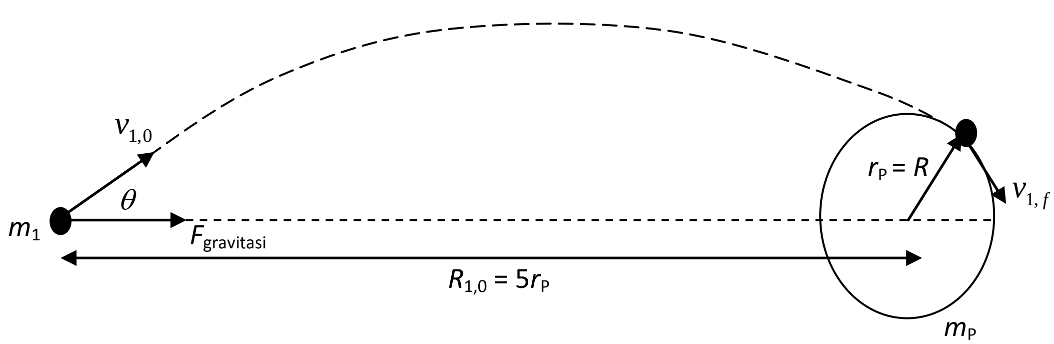
dan ini berakibat $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{M+3m}}$ (**1 poin**)

3- (***15 poin***) Sebuah pesawat ruang angkasa dikirimkan untuk menyelidiki suatu planet yang bermassa m_P dan berjari-jari r_P. Ketika menggantung tak bergerak di ruang angkasa pada jarak $5r_P$ dari pusat massa planet, pesawat meluncurkan paket alat dengan kecepatan v_0. Paket tersebut memiliki massa m_1 yang jauh lebih kecil daripada massa pesawat ruang angkasa. Paket diluncurkan pada sudut elevasi θ terhadap garis radial diantara pusat massa planet dan pesawat ruang angkasa.

a) Bagaimanakah kondisi momentum sudut paket terhadap pusat massa planet?
b) Berapakah kecepatan paket ketika tepat menyinggung permukaan planet sebagai fungsi dari sudut θ?
c) Berapakah besar sudut θ agar paket dapat menyinggung permukaan planet?



***Jawaban*:**



a. Torka terhadap pusat massa planet akibat gaya gravitasi pada paket oleh planet adalah:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{0,m_1} \times \vec{F}^G_{Pm_1} \qquad (1) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

dengan

$\vec{r}_{0,m_1} \equiv$ vektor posisi paket tehadap pusat massa planet

$\vec{F}^G_{Pm_1} \equiv$ Gaya gravitasi pada paket oleh planet

Karena $\vec{r}_{0,m_1}$ dan $\vec{F}^G_{Pm_1}$ selalu antiparalel maka $\vec{\tau} = 0$, **(1 poin)**

$\therefore$ momentum sudut paket terhadap pusat massa planet adalah **konstan**. **(2 poin)**

b. Momentum sudut awal paket terhadap pusat massa planet adalah:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{0,i} = \vec{r}_{0,i} \times m_1 \vec{v}_{1,0} &= 5R\,\hat{r} \times \left(-m_1 v_0 \cos\theta\,\hat{r} + m_1 v_0 \sin\theta\,\hat{\theta}\right) \\ &= 5R m_1 v_0 \sin\theta\,\hat{k}\end{aligned} \qquad (2) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Momentum sudut terhadap pusat massa planet ketika paket tepat menyinggung permukaan planet adalah:

$$\vec{L}_{0,f} = \vec{r}_{0,f} \times m_1 \vec{v}_{1,f} = R m_1 v_{1,f}\,\hat{k} \qquad (3) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Karena momentum sudut terhadap pusat massa planet konstan, maka

$$\vec{L}_{0,i} = \vec{L}_{0,f} \qquad (4) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

Subsitutusi pers. (2) dan (3) ke dalam pers. (4) kemudian ambil komponen ke sumbu Z pada ke dua sisi, maka akan diperoleh:

$$5R m_1 v_0 \sin\theta = R m_1 v_{1,f} \qquad (5)$$

Sehingga kecepatan paket tepat ketika menyinggung permukaan planet adalah

$$\therefore \quad v_{1,f} = 5 v_0 \sin\theta \qquad (6) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

c. Karena tidak ada gaya non-konservatif yang bekerja pada paket, maka energy mekanik adalah konstan,

$$E_i = E_f \qquad (7) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Pilih pada jarak di tak berhingga sebagai titik nol untuk energy potensial, maka persamaan energi menjadi

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{G m_1 m_P}{5R} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 - \frac{G m_1 m_P}{R} \qquad (8) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Masukkan kecepatan paket pada pers.(6) ke dalam pers. (8), sehingga diperoleh

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{G m_1 m_P}{5R} = \tfrac{1}{2} m_1 \left(5 v_0 \sin\theta\right)^2 - \frac{G m_1 m_P}{R} \qquad (9)$$

Dengan mengatur suku-suku pada pers. (9) akan diperoleh:

$$\frac{4 G m_1 m_P}{5R} = \tfrac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(25 \sin^2\theta - 1\right) \qquad (10) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Sehingga diperoleh:

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{8Gm_P}{5Rv_0^2} + 1 \right)} \right) \qquad (11) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

4- (***18 poin***) Sebuah bola A menggelinding tanpa slip dengan laju *v* mendekati bola B yang sedang diam pada suatu permukaan datar yang kasar dengan koefisien gesek μ_s dan μ_k. Kedua bola identik dan massa bola masing-masing adalah *m*. Selama proses tumbukan, impuls gaya gesek sangat kecil sehingga dapat diabaikan dan tumbukan terjadi secara elastik sempurna. Kemudian, diketahui sesaat setelah tumbukan, kedua bola menggelinding dengan slip dan pusat massa kedua bola segaris. Bila setelah bertumbukan, kedua bola akan menggelinding tanpa slip dalam selang waktu tertentu, maka tentukan:

a) selang waktu kedua bola bergerak dengan slip,
b) kecepatan masing-masing bola setelah tumbukan, ketika kedua bola telah bergerak menggelinding tanpa slip,
c) energi sistem yang hilang jika energi mula-mula adalah E_0 (nyatakan dalam E_o).

***Jawaban*:**

a. Tinjau ketika proses tumbukan. Karena gaya kontak antara kedua benda ketika bertumbukan melalui pusat masing-masing bola, maka momentum sudut relatif pusat masing-masing bola konstan, sehingga didapatkan

$$\omega_A' = \omega_A, \qquad \omega_B' = 0 \qquad (1) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Kekekalan momentum linear dan kekekalan energi kinetik selama proses tumbukan (elastik),

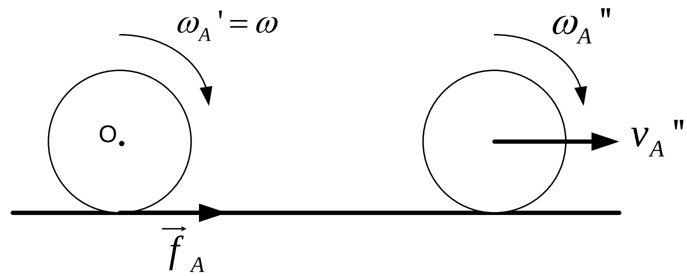
$$mv = mv_A' + mv_B'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}I\omega_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}I\omega_B'^2 \qquad (2) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

Dari kedua persamaan diatas didapatkan,

$$v_A' = 0, \qquad v_B' = v \qquad (3) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Sesaat setelah tumbukan kedua bola bergerak dengan slip. Tinjau bola A,



Hukum Newton untuk translasi

$$\sum F_{Ax} = m_A a_{Ax}$$
$$f_A = m a_A \qquad (4) \qquad (\textbf{1 poin})$$

Hukum Newton untuk rotasi (ambil putaran searah jarum jam sebagai positif)

$$\sum \tau_{AO} = I_O \alpha_{AO}$$
$$-f_A R = \frac{2}{5} m R^2 \alpha_A \qquad (5) \qquad (\textbf{2 poin})$$
$$f_A = -\frac{2}{5} m R \alpha_A$$

Dari kedua persamaan diatas didapatkan

$$a_A = -\frac{2}{5}\alpha_A R \qquad (6) \qquad (\textbf{1 poin})$$

Kecepatan linear dan kecepatan sudut bola ketika bola menggelinding tepat tanpa slip,

$$v_A'' = a_A t$$
$$\omega_A'' = \omega + \alpha_A t \qquad (7) \qquad (\textbf{1 poin})$$

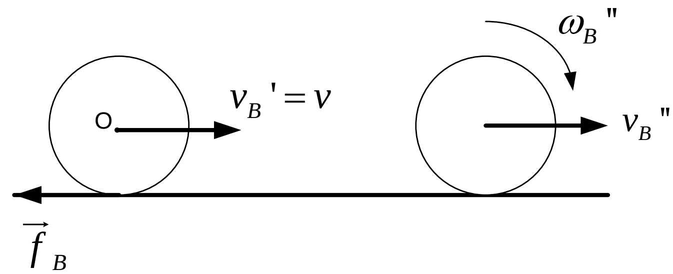
Karena bola menggelinding tanpa slip, maka didapatkan

$$t = \frac{2\omega R}{7a_A} = \frac{2v}{7\mu_k g} \qquad (8) \qquad (\textbf{1 poin})$$

b. sehingga didapatkan

$$v_A'' = \frac{2}{7}v \qquad \omega_A'' = \frac{2}{7}\omega \qquad (9) \qquad (\textbf{1 poin})$$

Tinjau bola B,



Hukum Newton untuk translasi

$$\sum F_{Bx} = m_B a_{Bx}$$
$$f_B = -m a_B \qquad (10) \qquad (\textbf{1 poin})$$

Hukum Newton untuk rotasi (ambil putaran searah jarum jam sebagai positif)

$$\sum \tau_{BO} = I_O \alpha_{BO}$$
$$f_B R = \frac{2}{5} m R^2 \alpha_B \quad .... \qquad (11) \qquad (\textbf{1 poin})$$
$$f_B = \frac{2}{5} m R \alpha_B$$

Dari kedua persamaan diatas didapatkan $a_B = -\frac{2}{5}\alpha_B R$ ..... (12)

Kecepatan linear dan kecepatan sudut bola setelah menggelinding tanpa slip,

$$v_B" = v + a_B t$$
$$\omega_B" = \alpha_B t \quad ..... \qquad (13)$$

Karena bola menggelinding tanpa slip, maka didapatkan

$$t = \frac{2\omega R}{7 a_B} \quad .... \qquad (14)$$

substitusi nilai percepatan, $t = \frac{2v}{7\mu_K g}$ .... (15)

sehingga didapatkan

$$v_B" = \frac{5}{7} v \qquad \omega_B" = \frac{5}{7}\omega \quad .... \qquad (16) \qquad (\textbf{1 poin})$$

c. Energi sistem mula-mula

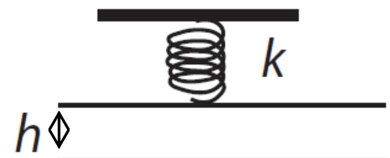
$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$= \frac{7}{10} m v^2 \quad ..... \qquad (17) \qquad (\textbf{1 poin})$$

Energi sistem pada akhir, setelah bergerak menggelinding tanpa slip kembali

$$E = \frac{1}{2}mv_A''^2 + \frac{1}{2}mv_B''^2 + \frac{1}{2}I\omega_A''^2 + \frac{1}{2}I\omega_B''^2 \qquad ..... \qquad (18) \quad \textbf{(1 poin)}$$
$$= \frac{29}{70}mv^2$$

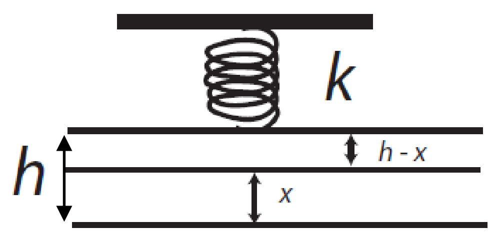
sehingga energi yang hilang adalah $\Delta E = \frac{20}{49}E_0$ ..... (19) (**2 poin**)

5- (***15 poin***) Diberikan sistem yang tersusun atas dua lempeng logam identik, masing-masing dengan luas permukaan *A*, yang bila dalam keadaan setimbangan atau netral (tanpa bermuatan listrik) kedua lempeng tersebut terpisah satu sama lain pada jarak *h*. Seperti tampak dalam gambar, lempeng bagian bawah dibuat tidak dapat bergerak. Lempeng bagian atas dikaitkan dengan sebuah pegas (dengan konstanta pegas *k*) yang digantung pada titik tetap. Bila kedua lempeng diberi beda potensial *V*, hitung (dinyatakan dalam *A*, *h*, *V* dan *k)*:



a) gaya listrik yang terjadi antar kedua lempeng;
b) jarak antar kedua lempeng setelah diberi beda potensial *V*;
c) besar beda potensial maksimum kedua lempeng yang menjamin kedua lempeng tidak dapat saling bersentuhan.

Jawaban:



a. Saat antara kedua keping terpasang beda potensial listrik *V* kedua lempeng akan berjarak *x*, maka keduanya akan merasakan gaya listrik, yaitu

$$F_\ell = \mathrm{grad}(U_\ell) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

Dengan mensubstitusi nilai $C = \frac{\varepsilon_0 A}{x}$ (**1 poin**)

Diperoleh harga $F_\ell = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x}V^2\right) = -\frac{\varepsilon_0 A}{2x^2}V^2$ (1) (**1 poin**)

Substitusikan pers (4) dibawah, maka diperoleh: $F_\ell = -\frac{9\,\varepsilon_0 AV^2}{8h^2}$ (5) (**2 poin**)

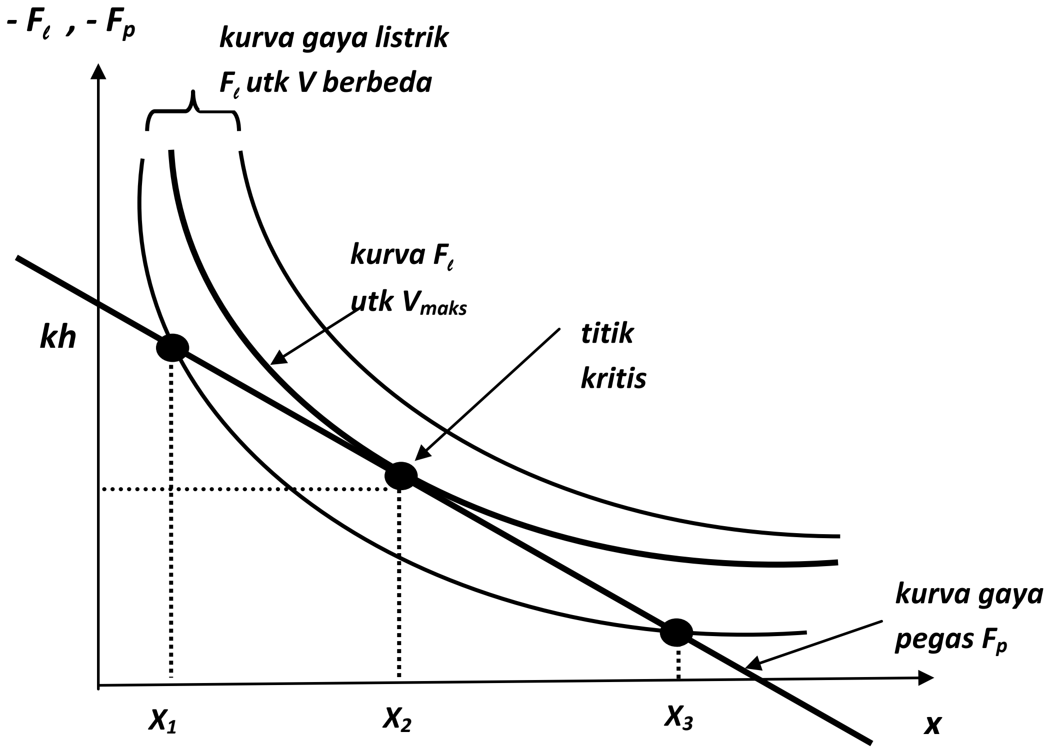
b. Kesetimbangan tercapai bila gaya listrik di atas mampu diimbangi oleh gaya pegas

$$F_p = -k(h - x) \qquad (2) \qquad \textbf{(2 poin)}$$

Penyamaan kedua persamaan (1) dan (2) diatas, $F_l = F_p$, menghasilkan persamaan polinom pangkat 3 dalam *x*,

$$\frac{\varepsilon_0 A}{2x^2}V^2 = k(h-x)\text{, atau} \quad 2x^3 - 2khx^2 + \varepsilon_0 AV^2 = 0 \qquad (3) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Secara umum pers (3) mempunyai 3 kemungkinan akar/penyelesaian, yaitu x_1, x_2, dan x_3, yang secara grafis gaya listrik (untuk beberapa nilai beda potensial V) dan gaya pegas sebagai fungsi x diberikan dalam gambar di bawah:



Dari grafik di atas terlihat bahwa ada dua akar/solusi untuk x yaitu: x_1 yang jelas merupakan kesetimbangan tak stabil karena besarnya gaya listrik dan/atau gaya pegas, dan x_3 yang menampilkan kesetimbangan stabil tetapi dengan jarak pisah antar keping yang amat besar. Oleh sebab itu besar beda potensial maksimum yang ditanyakan akan terkait dengan situasi dimana kedua kurva dari grafik gaya listrik dan grafik gaya pegas bersinggungan, yaitu pada saat akarnya $x = x_2$. Dengan demikian secara grafis keseimbangan kedua gaya di atas sama maknanya dengan menyamakan kemiringan (slope) kedua kurva grafik F_ℓ (x) dan F_p (x) di titik $x = x_2$. Maka,

$$\frac{\varepsilon_0 AV^2}{x^3} = k \text{ , sehingga diperoleh nilai } x = \left(\frac{\varepsilon_0 AV^2}{k}\right)^{1/3} \qquad (3) \qquad \textbf{(1 poin)}$$

Penyamaan kedua persamaan (1) dan (2) di atas memberikan

dan dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh $\quad \dfrac{kx^3}{2x^2} = k(h-x)$, atau $x = \dfrac{2h}{3}$ $\qquad$ (4) $\quad$ (**2 poin**)

c. Substitusi pers (4) ke dalam pers (3) akhirnya memberikan besar beda potensial maksimum kedua lempeng (V) yang menjamin kedua lempeng tidak dapat bersentuhan, yaitu

$$V = \sqrt{\frac{8kh^3}{27\varepsilon_0 A}} \quad . \qquad \text{(3 \textbf{poin})}$$