SOAL UJIAN
SELEKSI CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2013
TINGKAT PROPINSI

FISIKA

Waktu : 3,5 jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2013

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

Olimpiade Sains Nasional 2013
Tingkat Propinsi

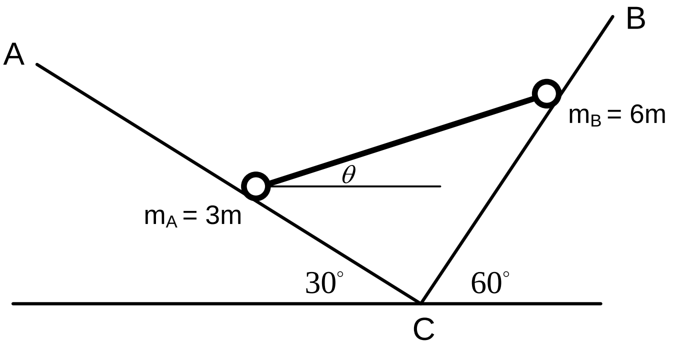
Bidang F i s i k a

Ketentuan Umum:

1- Periksa lebih dulu bahwa jumlah soal Saudara terdiri dari 7 (tujuh) buah soal.
2- Waktu total untuk mengerjakan tes ini adalah 3,5 jam.
3- Peserta **dilarang** menggunakan **kalkulator**.
4- Peserta dilarang meminjam dan saling meminjamkan alat-alat tulis.
5- Tulislah jawaban Saudara di kertas yang telah disediakan dengan menggunakan **ballpoint** dan tidak boleh menggunakan pinsil.
6- Kerjakanlah lebih dahulu soal-soal dari yang Anda anggap mudah/bisa dan tidak harus berurutan.
7- Setiap nomor soal yang berbeda harap dikerjakan pada lembar jawaban yang terpisah.
8- Jangan lupa menuliskan nama Saudara atau identitas lainnya pada setiap lembar jawaban yang Saudara gunakan.
9- Meskipun sudah selesai mengerjakan semua jawaban, Anda tidak diperbolehkan meninggalkan ruangan tes hingga waktu tes berakhir.

Tes Seleksi OSN 2013 Bidang FISIKA
TINGKAT PROPINSI
Waktu: 3,5 Jam

1. (**20 poin**) Pada gambar diketahui AC dan BC adalah suatu bidang licin yang masing-masing membentuk sudut 30° dan 60° terhadap horizontal. Dua buah benda partikel dengan massa $m_A = 3m$ dan $m_B = 6m$ terletak pada bidang tersebut dan terhubung dengan suatu batang yang tegar dengan panjang L dan bermassa M (lihat gambar). Diketahui sistem berada pada posisi setimbang. Tentukanlah:
   a. Gaya yang diberikan dinding pada masing-masing benda
   b. Gaya yang diberikan batang pada masing-masing benda
   c. Jika θ adalah sudut antara batang dengan horizontal, tentukanlah $\tan\theta$
   d. Tentukan apakah kesetimbangannya stabil atau labil



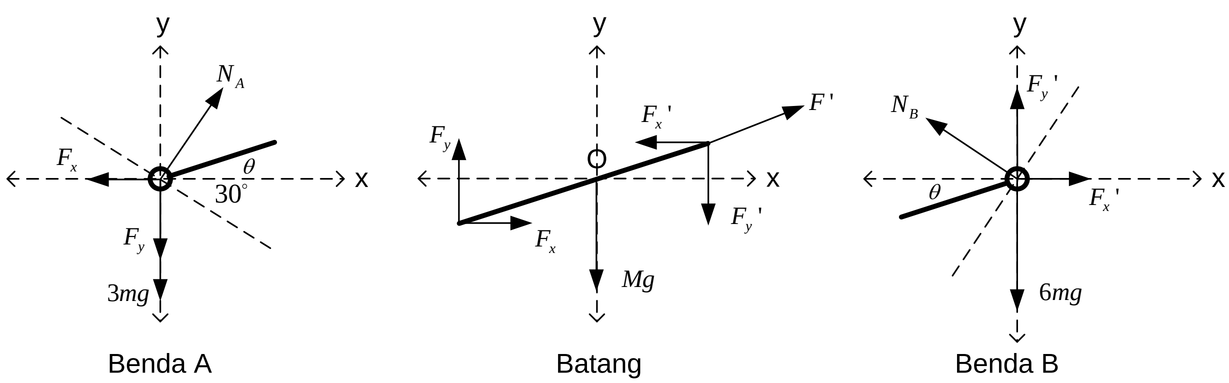
Jawab:

Misalkan,

F adalah gaya kontak batang dengan benda A
F' adalah gaya kontak batang dengan benda B
N_A adalah gaya kontak dinding dengan benda A
N_B adalah gaya kontak dinding dengan benda B

Diagram gaya bebas pada benda A, benda B dan batang

(Gbr diagram gaya bebas: 1 poin)



Untuk benda A

$$\sum F_{Ax} = 0$$
$$N_A \cos 60^\circ - F_x = 0$$

(1 poin) (1)

$$\sum F_{Ay} = 0$$
$$N_A \sin 60^\circ - F_y - 3mg = 0$$

Untuk benda B

$$\sum F_{Bx} = 0$$
$$F_x' - N_B \cos 30^\circ = 0$$

(1 poin) (2)

$$\sum F_{By} = 0$$
$$N_B \sin 30^\circ + F_y' - 6mg = 0$$

Untuk batang

$$\sum F_x = 0$$
$$F_x' - F_x = 0$$

(1 poin) (3)

$$\sum F_{Ay} = 0$$
$$F_y - F_y' - Mg = 0$$

a. Dari persamaan (1), (2) dan (3) didapatkan gaya normal dari dinding yang bekerja pada benda A dan B adalah

$$N_A = N_B\sqrt{3} = \frac{g\sqrt{3}}{2}(M + 9m) \qquad \text{(2 poin)} \qquad (4)$$

b. Gaya kontak batang dengan benda A adalah

$$F_x = \frac{g}{4}\sqrt{3}(M + 9m)$$
$$F_y = \frac{3}{4}g(M + 5m)$$

(2 poin) (5)

Gaya kontak batang dengan benda B adalah

$$F_x' = \frac{g}{4}\sqrt{3}(M + 9m)$$
$$F_y' = \frac{1}{4}g(-M + 15m)$$

(2 poin) (6)

c. Tinjau sistem secara keseluruhan dan ambil torsi terhadap titik A, didapatkan

$$\sum \tau_A = 0$$

(1 poin)

$$N_B L \sin(30^\circ + \theta) - 6mgL\cos\theta - Mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0 \qquad (7)$$

$$N_B = \frac{g}{2}\frac{\cos\theta}{\sin(30^\circ + \theta)}(12m + M)$$

(1 poin)

Substitusi nilai N_B pada persamaan (4), didapatkan persamaan

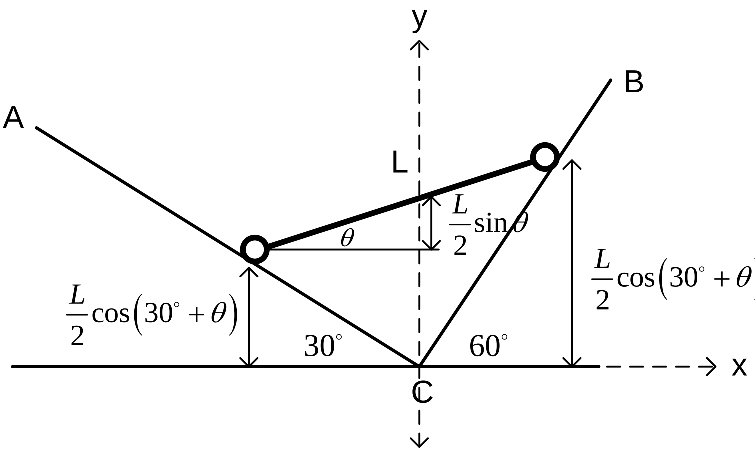
$$\sin(30^\circ + \theta) = \left(\frac{12m + M}{9m + M}\right)\cos\theta$$

dari identitas $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, didapatkan

$$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\left(\frac{12m+M}{9m+M}\right)\cos\theta$$ (1 poin)

Selesaikan persamaan diatas didapatkan

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{15m+M}{9m+M}\right)$$ (1 poin) (8)



Gambar
(1 poin)

d. Energi potensial sistem relatif terhadap titik C adalah

$$\begin{aligned}U(\theta)&=\frac{gL}{2}(9m+M)\cos(30^\circ+\theta)+\frac{gL}{2}(12m+M)\sin\theta\\&=\frac{gL}{2}\left\{(9m+M)\sqrt{3}\cos\theta+(15m+M)\sin\theta\right\}\end{aligned}$$ (1 poin) (9)

Turunan pertama terhadap θ adalah

$$\frac{dU}{d\theta}=\frac{gL}{2}\left\{-(9m+M)\sqrt{3}\sin\theta+(15m+M)\cos\theta\right\}$$ (1 poin) (10)

(Kita dapat mengetahui sudut saat setimbang dengan menggunakan syarat energi potensial minimum $\frac{dU}{d\theta}=0$). (1 poin)

Turunan kedua terhadap θ adalah

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}=-\frac{gL}{2}\left\{(9m+M)\sqrt{3}\cos\theta+(15m+M)\sin\theta\right\}$$ (11)

Karena $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, maka $\frac{d^2U}{d\theta^2}<0$, sehingga kesetimbangannya **tidak stabil** (**labil**).

(1 poin) (1 poin)

2. (**10 poin**) Tinjau dua buah partikel bermassa *M* dan *m* yang mula-mula diam satu sama lain dan terpisah pada jarak yang sangat jauh. Walaupun demikian, mereka masih mengalami interaksi gravitasi dengan tetapan gravitasi adalah *G*, sehingga setelah dilepas dari keadaan diam keduanya bergerak mendekat satu sama lain. Ketika jarak antara keduanya adalah *d*, tentukan kecepatan relatif antara kedua partikel tersebut.

Jawab:

Misalkan kecepatan partikel *m* dan *M* adalah v_m dan v_M. Karena tidak ada gaya luar, maka momentum linear total bernilai konstan. Karena mula-mula kedua partikel diam, maka momentum linear total sama dengan nol.

$$mv_M + Mv_M = 0 \text{ atau } v_M = -\frac{mv_m}{M} \qquad \text{(2 poin)}$$

Karena gaya yang bekerja hanya gaya gravitasi yang merupakan gaya konservatif, maka berlaku energi mekanik bernilai konstan. EK mula-mula = 0 karena kedua partikel mula-mula diam. EP mula-mula = 0 karena keduanya terpisah pada jarak yang sangat jauh. Jadi mula-mula EK + EP = 0. Saat kecepatan keduanya masing-masing adalah v_m dan v_M,

$$\text{EK total} = \tfrac{1}{2}mv_m^2 + \tfrac{1}{2}Mv_M^2 \qquad \text{(1 poin)}$$

Sedangkan EP ketika itu dimana keduanya terpisah sejauh *d* adalah

$$\text{EP} = -\frac{GMm}{d} \qquad \text{(1 poin)}$$

Jadi

$$\tfrac{1}{2}mv_m^2 + \tfrac{1}{2}Mv_M^2 - \frac{GMm}{d} = 0 \qquad \text{(1 poin)}$$

Dengan memasukkan nilai v_M ke dalam persamaan terakhir di atas, diperoleh

$$v_m = \sqrt{\frac{2GM^2}{d(M+m)}} \qquad \text{(2,5 poin)}$$

Kecepatan relatif antara kedua partikel adalah

$$\boxed{v_{rel} = v_m - v_M = \frac{M+m}{M}v_m = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}} \qquad \text{(2,5 poin)}$$

Sebagai tambahan, soal ini dapat juga dikerjakan dengan menggunakan konsep pusat massa.

EK total dapat dinyatakan sebagai

$$\text{EK total} = \tfrac{1}{2} m_{tot} v_{pm}^2 + \tfrac{1}{2} \mu v_{rel}^2 \qquad \text{(3 poin)}$$

dimana massa total $m_{tot} = M + m$, v_{pm} = kecepatan pusat massa, μ = massa tereduksi yang memenuhi $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$ atau $\mu = \frac{Mm}{M+m}$, serta v_{rel} = kecepatan relatif. (1 poin)

Karena tidak ada gaya luar maka percepatan pusat massa a_{pm} = 0 sehingga kecepatan pusat massa v_{pm} = konstan. (1 poin)

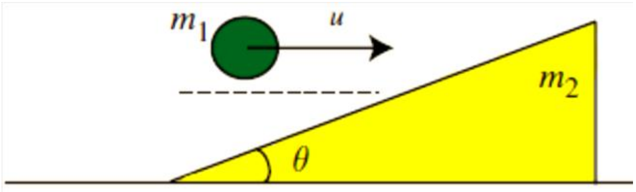
Namun karena mula-mula kedua partikel diam, v_{pm} = 0. Jadi dengan menggunakan hukum kekekalan energi

$$\tfrac{1}{2}(M+m).0^2 + \tfrac{1}{2}\frac{Mm}{M+m} v_{rel}^2 - \frac{GMm}{d} = 0 \qquad \text{(2 poin)}$$

sehingga diperoleh

$$\boxed{v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}} \qquad \text{(3 poin)}$$

3. (**10 poin**) Sebuah bidang miring dengan sudut kemiringan θ, bermassa m_2 berada pada permukaan horizontal yang licin dan dalam keadaan diam. Sebuah bola elastik bermassa m_1 bergerak pada arah horizontal dengan kecepatan u kemudian menumbuk bidang miring tersebut. Setelah tumbukan, bola terpental dengan kecepatan v_1 dan kemudian jatuh kembali pada titik ketika pertama kali bertumbukan. Sementara itu, bidang miring yang awalnya diam, setelah tumbukan, kemudian bergerak ke kanan dengan kecepatan v_2. Sudut pantul bola diukur dari permukaan bidang miring adalah α. Rasio massa $q = m_2/ m_1$.



a. Tuliskan komponen horizontal dari momentum linear ! Apakah komponen horizontal dari momentum linear ini kekal selama tumbukan ?
b. Bila tumbukan lenting sempurna dan permukaan horizontal bidang miring licin, tuliskan persamaan energy kinetic dan sederhanakan persamaan tersebut! Apakah energy kinetic kekal ?
c. Selama tumbukan, tuliskan komponen tangensial dari kecepatan bola! Ke manakah arah gaya kontak bola terhadap permukaan bidang miring ? Apakah ada perubahan nilai komponen tangensial dari kecepatan bola ?
d. Tuliskan persamaan kecepatan yang menghubungkan kecepatan bola dan kecepatan bidang miring setelah bola jatuh kembali pada titik awal tumbukan untuk kedua kalinya!
e. Nyatakan kecepatan awal bola u dan u^2 dalam fungsi q, v_1, α dan θ !
f. Tentukan nilai rasio q dalam fungsi $tan^2\,\theta$!

JAWAB :

a. Tuliskan komponen horizontal dari momentum linear ! Apakah komponen horizontal dari momentum linear ini kekal selama tumbukan ?

   Komponen horizontal dari momentum linear adalah :

   $$u = v_1 \cos(\alpha + \theta) + qv_2.$$

   (1.0 poin)

   Selama tumbukan, komponen horizontal dari momentum linear ini adalah kekal.

   (0.5 poin)

b. Bila tumbukan lenting sempurna dan permukaan horizontal bidang miring licin, tuliskan persamaan energy kinetic ! Apakah energy kinetic kekal ?

   Persamaan energy kinetic : $u^2 = v_1{}^2 + qv_2{}^2$ (1.0 poin)

   Karena tumbukan lenting sempurna maka Energi kinetik adalah kekal (0.5 poin)

c. Selama tumbukan, tuliskan komponen tangensial dari kecepatan bola! Ke manakah arah gaya kontak bola terhadap permukaan bidang miring? Apakah ada perubahan nilai komponen tangensial dari kecepatan bola ?

Komponen tangensial dari kecepatan bola adalah : $u\cos(\theta) = v_1\cos(\alpha)$ (1.0 poin)

Arah komponen tangensial dari kecepatan bola ini adalah :
tegak lurus Permukaan bola (0.25 poin)
Nilai komponen tangensial dari kecepatan bola ini **tidak berubah** atau **konstan**.
(0.25 poin)

d. Tuliskan persamaan kecepatan yang menghubungkan kecepatan bola dan kecepatan bidang miring setelah bola jatuh kembali pada titik awal tumbukan untuk kedua kalinya!

persamaan kecepatan yang menghubungkan kecepatan bola dan kecepatan bidang miring setelah bola jatuh kembali pada titik awal tumbukan untuk kedua kalinya adalah :

$$v_1\cos(\alpha+\theta) = v_2$$

(1.0 poin)

e. Nyatakan kecepatan awal bola u dan u^2 dalam fungsi q, v_1, α dan θ !
Dengan menggunakan persamaan di atas pada :

$$u = v_1\cos(\alpha+\theta) + qv_2$$

diperoleh :

$$u = (1+q)v_1\cos(\alpha+\theta)$$

(0.75 poin)

dan pada persamaan :

$$u^2 = v_1^2 + qv_2^2$$

diperoleh :

$$u^2 = v_1^2[1 + q\cos^2(\alpha+\theta)]$$

(0.75 poin)

f. Tentukan nilai rasio q dalam fungsi $tan^2\ \theta$!
Dengan menguadratkan persamaan :

$$u = (1+q)v_1\cos(\alpha+\theta)$$

dan mengkombinasikan dengan persamaan :

$$u^2 = v_1^2[1 + q\cos^2(\alpha+\theta)]$$

untuk menghilangkan u dan v_1, diperoleh :

$$q^2 + q = \tan^2(\alpha+\theta) = \left[\frac{\tan(\alpha)+\tan(\theta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\theta)}\right]^2$$

(1.5 poin)

Pembagian persamaan :

$$u = (1+q)v_1\cos(\alpha+\theta)$$

oleh :

$$u \cos(\theta) = v_1 \cos(\alpha)$$

dan dengan sedikit modifikasi, menghasilkan :

$$\tan(\alpha) = \frac{q \cot(\theta) - \tan(\theta)}{q+1}$$

(1.0 poin)

Subtitusi persamaan di atas ke persamaan :

$$q^2 + q = \tan^2(\alpha + \theta) = \left[\frac{\tan(\alpha) + \tan(\theta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\theta)}\right]^2$$

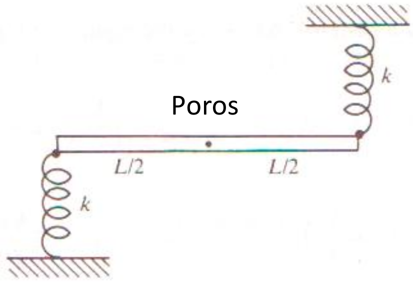
diperoleh rasio q :

$$q = \frac{\tan^2(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

(1.0 poin)

dengan kondisi : $0 \le q \le \infty$ untuk $0 \le \theta \le \pi/4$ (0.5 poin)

4. (**13 poin**) Sebuah batang homogen (massa m dan panjang L) dipantek dibagian pusatnya dan kedua ujungnya dihubungkan ke sebuah pegas (dengan konstanta pegas k) sehingga ia dapat berotasi (lihat gambar). Kondisi pada gambar adalah keadaan setimbang. Jika posisi batang tersebut disimpangkan ke atas dengan sudut θ kecil dan kemudian dilepaskan,



a. Tunjukan bahwa batang akan melakukan gerak harmonik sederhana
b. Tentukan frekuensi osilasinya
c. Hitung kecepatan batang pada saat ia melintasi posisi setimbangnya (horizontal)

Jawab:

a- Jika batang berotasi dengan simpangan sudut θ yang kecil, maka masing-masing pegas akan mengalami simpangan sejauh $L\theta/2$. (1 poin)

Setiap pegas menyebabkan torsi pada batang sebesar: $\tau = \frac{kL\theta}{2}\frac{L}{2}$ (1 poin)

Sehingga: $\sum\tau = I\alpha$ (1 poin) ➔ $-2\frac{kL\theta}{2}\frac{L}{2} = I_{pm}\alpha$ (1 poin)

Dengan memasukan nilai $I_{pm} = \frac{mL^2}{12}$, (1 poin)

Kita dapatkan persamaan: $\alpha = -\frac{6k}{m}\theta$ atau $\ddot{\theta} + \frac{6k}{m}\theta = 0$ GHS (2 poin)

b- Frekuensi osilasinya: $\omega = (6k/m)^{1/2}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{m}}$$ (2 poin)

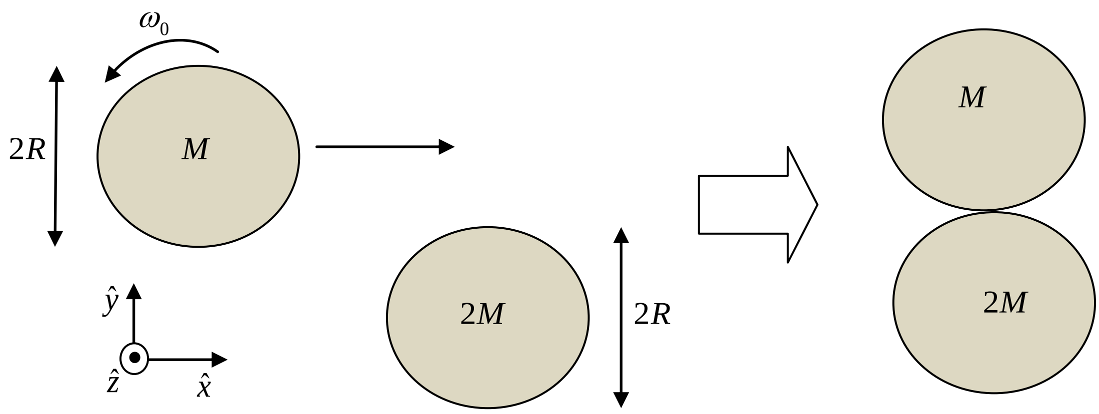
c- Solusi untuk persamaan differensial pada jawaban a diatas adalah:

$\theta = \theta_o \cos 2\pi ft$ (2 poin)

Maka kecepatan maksimumnya:

$$v_{\max} = \frac{L}{2}2\pi f\theta_o = L\theta_o\sqrt{\frac{3k}{2m}}$$ (2 poin)

5. (**15 poin**) Sebuah piringan uniform bermassa M dan berdiameter $2R$ bergerak ke arah piringan uniform lainnya yang bermassa $2M$ dan berdiameter $2R$ pada permukaan meja licin (tak bergaya gesek). Piringan pertama memiliki kecepatan awal v_0 dan laju rotasi awal ω_0 seperti ditunjukkan pada gambar, sedangkan piringan ke dua awalnya stasioner. Ketika piringan pertama menyentuh piringan ke dua, sesaat keduanya bergerak seperti objek tunggal.



(a) Berapa kecepatan dan kecepatan sudut putaran piringan yang terkombinasi setelah tumbukan? Indikasikan besar dan arahnya.
(b) Untuk nilai ω_0 berapa kombinasi piringan tidak akan berotasi?
(c) Berapa bayak energy mekanis total yang hilang dalam benturan ini, anggap bahwa kombinasi system piringan tidak merotasi?

Solusi:

(a). Tidak ada gaya ekternal pada system ini, sehingga momentum awal dan akhir sama dan sama dengan $M\vec{v}_0$ kearah kanan. Massa total kombinasi system piringan adalah $3M$, sehingga kecepatan akhir adalah

$$\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v}_0 \qquad \text{(1 poin)}$$

Momentum sudut total system juga kekal, tetapi dalam hal ini kita harus lebih hati-hati, ketika pertanyaan terkait dengan kecepatan sudut putaran akhir, sehingga penting untuk menghitung momentum sudut awal dan akhir sekitar pusat massa system piringan terkombinasi. Posisi pusat massa system terletak pada jarak:

$$R_{\text{PM}} = \frac{RM - R(2M)}{3M} = -\frac{1}{3}R \qquad \text{(1 poin)}$$

di bawah titik kontak ke dua piringan. Terhadap titik pusat massa ini, momentum sudut awal system berasal dari gerak rotasi piringan dan gerak translasi pusat massanya terhadap pusat massa system piringan terkombinasi:

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}MR^2\omega_0\hat{z} - \frac{4}{3}RMv_0\hat{z} = I_f\vec{\omega}_f \qquad \text{(1,5 poin)}$$

dengan $\hat{z}$ arah momentum sudut kearah keluar bidang gambar.

Momen inersial akhir dua piringan terkombinasi adalah:

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{4}{3}R\right)^2 + \frac{1}{2}(2M)R^2 + 2M\left(\frac{2}{3}R\right)^2 = \frac{25}{6}MR^2. \qquad \text{(1,5 poin)}$$

Oleh karena itu kecepatan sudut putaran akhir adalah:

$$\therefore\ \vec{\omega}_f = \left(\frac{3}{25}\omega_0 - \frac{8}{25}\frac{v_0}{R}\right)\hat{z} \qquad \text{(2 poin)}$$

(b) Untuk kecepatan sudut putaran akhir nol, dua suku dalam persamaan kecepatan sudut akhir di atas saling menghilangkan, sehingga didapat:

$$\therefore\ \omega_0 = \frac{8}{3}\frac{v_0}{R} \qquad \text{(3 poin)}$$

(c) Agar system akhir tidak berotasi, maka $\omega_0 = \frac{8}{3}\frac{v_0}{R}$. Oleh karena itu energy awal sitem adalah:

$$E_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{8}{3}\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{41}{18}Mv_0^2. \qquad \text{(1,5 poin)}$$

Energi akhir hanya energy translasi:

$$E_f = \frac{1}{2}(3M)\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}Mv_0^2 \qquad \text{(1,5 poin)}$$

sehingga kehilangan energi total adalah:

$$\therefore\ E_f - E_i = \left(\frac{1}{6} - \frac{41}{18}\right)Mv_0^2 = -\frac{19}{9}Mv_0^2 \qquad \text{(2 poin)}$$

6. (**17 poin**) Sebanyak N orang yang masing-masing bermassa m berdiri di atas suatu kereta bermassa M yang mula-mula diam di atas rel licin (abaikan gesekan kereta dengan rel). Orang-orang tersebut melompat pada ujung kereta dengan kecepatan u relatif terhadap kereta. Dalam hal ini ada dua kasus.

(i) Semua orang bersama-sama melompat pada waktu yang sama.

(ii) Satu orang melompat pada suatu waktu, dilanjutkan dengan orang kedua beberapa waktu kemudian, dan seterusnya hingga orang ke-N secara berurutan.

Setelah semua orang melompat dari kereta,

a- tunjukan bahwa kecepatan akhir kereta pada kasus (ii) lebih besar daripada kecepatan akhir pada kasus (i) dimana selisih antara kedua kecepatan akhir tersebut dapat dituliskan sebagai $\sqrt{\ } C \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{M+(N-k)m}$.

b- carilah nilai tetapan C, dinyatakan dalam m, M, N dan u.

Solusi:

a- Kasus (i)

Keadaan awal: kereta dan N orang diam, sehingga total momentum awal = 0.

Keadaan akhir: N orang bersama-sama melompat terhadap kereta dengan kecepatan orang terhadap kereta adalah u. Jika kecepatan kereta terhadap tanah = v_f maka kecepatan orang terhadap tanah adalah $u+v_f$. Total momentum akhir juga = 0 sehingga $Mv_f + Nm(u+v_f) = 0$. Kecepatan akhir kereta terhadap tanah adalah

$$v_f = -N\frac{mu}{M+Nm} \qquad \text{(2 poin)}$$

Tanda minus menunjukkan bahwa arah kecepatan akhir kereta berlawanan dengan arah lompatan orang-orang.

Kasus (ii)

Keadaan awal: kereta dan N orang diam, sehingga total momentum awal = 0.

Keadaan akhir: 1 orang melompat terhadap kereta dengan kecepatan orang terhadap kereta adalah u. Sebanyak N – 1 orang masih berada di kereta. Jika kecepatan kereta terhadap tanah = v_1 maka kecepatan satu orang tersebut terhadap tanah adalah $u+v_1$.

Total momentum akhir juga = 0 sehingga $(M+(N-1)m)v_1 + m(u+v_1) = 0$ atau

$$v_1 = -\frac{mu}{M + Nm} \qquad \text{(2 poin)}$$

Selanjutnya, keadaan awal kereta dan N – 1 orang bergerak dengan kecepatan v_1, sedangkan keadaan akhirnya 1 orang melompat terhadap kereta dengan kecepatan orang terhadap kereta adalah u. Sebanyak N – 2 orang masih berada di kereta. Jika kecepatan kereta terhadap tanah = v_2 maka kecepatan satu orang tersebut terhadap tanah adalah $u + v_2$. Persamaan kekekalan momentum adalah:

$$(M + (N-1)m)v_1 = (M + (N-2)m)v_2 + m(u + v_2) \text{ atau}$$

$$v_2 = v_1 - \frac{mu}{M + (N-1)m}.$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$v_3 = v_2 - \frac{mu}{M + (N-2)m}$$

yang berarti setelah k orang melompat dari kereta, maka kecepatan akhir kereta adalah

$$v_k = v_{k-1} - \frac{mu}{M + (N-k+1)m} \qquad \text{(2 poin)}$$

Akhirnya setelah N orang melompat, kecepatan akhir kereta adalah

$$v_N = v_{N-1} - \frac{mu}{M + m} \qquad \text{(2 poin)}$$

Jika seluruh nilai v_k (k = 1, 2, 3, …, N) dijumlahkan maka bentuk v_1 di ruas kiri dan kanan akan saling melenyapkan, demikian pula dengan v_2, …, hingga v_{N-1}. Akhirnya

$$v_N = -\frac{mu}{M + Nm} - \frac{mu}{M + (N-1)m} - ... - \frac{mu}{M + m} = -mu\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{M + (N-k+1)m}.$$

Jika kita bandingkan kecepatan akhir antara kedua kasus, tampak bahwa

$$\|v_N\| > \|v_f\| \qquad \text{(2 poin)}$$

sebab

$$v_f = -N\frac{mu}{M + Nm} = -mu\left[\frac{1}{M + Nm} + \frac{1}{M + Nm} + ... + \frac{1}{M + Nm}\right] \text{ sebanyak } N \text{ suku} \qquad \text{(1 poin)}$$

sedangkan

$$v_N = -mu\left[\frac{1}{M + Nm} + \frac{1}{M + (N-1)m} + ... + \frac{1}{M + m}\right] \qquad \text{(1 poin)}$$

Nampak bahwa setiap suku v_N yang berada di dalam kurung selalu lebih besar daripada setiap suku v_f yang berada di dalam kurung (kecuali suku $1/(M+Nm)$).

Jadi, selisih kedua kecepatan akhir adalah

$$\Delta v_{akhir} = v_N - v_f = -mu\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{M+(N-k+1)m}\right) - \left(-mu.N.\frac{1}{M+Nm}\right) \qquad \text{(2 poin)}$$

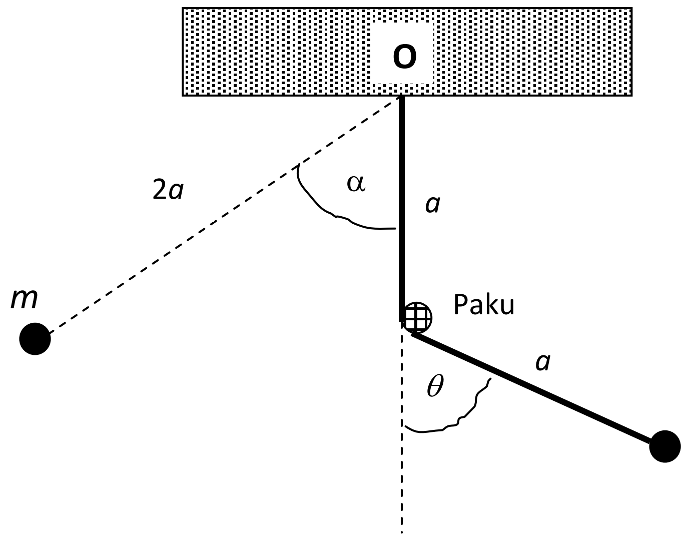
b- Dengan substitusi $k = i + 1$ maka

$$\Delta v_{akhir} = v_N - v_f = -mu\left[\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{1}{M+(N-i)m} - \frac{1}{M+Nm}\right)\right]$$

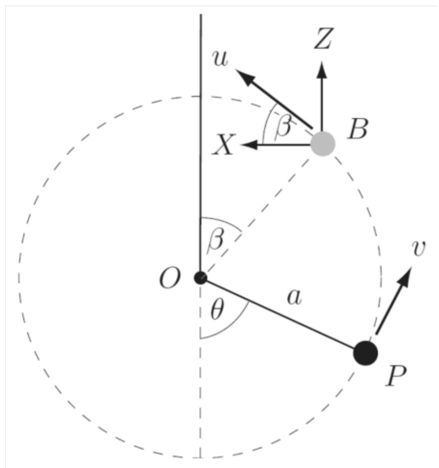
$$= -mu\left[\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(M+Nm)-(M+(N-i)m)}{(M+(N-i)m)(M+Nm)}\right] = -\frac{m^2u}{M+Nm}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{i}{(M+(N-i)m)}.$$

sehingga disini nilai $\boxed{C = -\frac{m^2u}{M+Nm}}$ (3 poin)

7. (**15 poin**) Sebuah bola yang cukup berat (massa m) digantung dengan menggunakan tali ringan yang tidak dapat mulur (panjang $2a$) di titik tetap O pada langit-langit (lihat gambar). Tali bersama bola mula-mula disimpangkan dari posisi vertikal sebesar sudut α dan dilepaskan dari keadaan diam. Pada arah vertikal ke bawah terdapat paku yang berjarak a dari titik O. Ada satu nilai sudut $\alpha = \alpha_0$ yang menyebabkan bola akhirnya dapat menyentuh/menumbuk paku. Tentukan besar sudut α_0 tersebut.



Jawab:



Sesaat setelah tali mengenai paku, bola akan bergerak mengikuti lintasan lingkaran berjari-jari a (lihat gambar). Katakan bola mulai meninggalkan lintasan lingkaran di titik B dengan kecepatan u yang membentuk sudut β terhadap arah datar (sumbu X). Pada saat tersebut, tegangan tali sama dengan nol, sehingga Hukum II Newton pada arah $\vec{BO}$ memberikan

$$mg\cos\beta = \frac{mu^2}{a} \qquad \text{(2 poin)}$$

Akibatnya, u dan β berhubungan melalui persamaan $u^2 = ga\cos\beta$. Pada saat tali menjadi kendor, lintasan bola sama dengan lintasan gerak parabola biasa. Dalam sistem koordinat *BXZ* (lihat gambar), lintasan bola dinyatakan oleh persamaan parabola sbb:

$$Z = \tan\beta \ X - \left(\frac{g}{2u^2\cos^2\beta}\right)X^2 = \tan\beta \ X - \left(\frac{1}{2a\cos^3\beta}\right)X^2 \qquad \text{(2 poin)}$$

Syarat agar bola menyentuh/menumbuk paku adalah : $Z = -a\cos\beta$ saat $X = a\sin\beta$, (1 poin)

sehingga $-\cos\beta = \sin\beta\tan\beta - \dfrac{\sin^2\beta}{2\cos^3\beta}$

sehingga $3\cos^2\beta = 1$, atau $\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ (2 poin)

Jadi, dengan menggunakan $u^2 = ga\cos\beta$,

kelajuan bola di titik B adalah $u = (ag/\sqrt{3})^{1/2}$. (2 poin)

Selanjutnya dengan menggunakan prinsip kekekalan energi mekanik E akan dicari satu nilai sudut $\alpha = \alpha_0$ yang menyebabkan bola akhirnya dapat menyentuh/menumbuk paku tersebut. Catatan: gaya tegangan tali dan gaya reaksi paku tidak melakukan usaha, sehingga persamaan kekekalan energinya adalah :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

dengan m adalah massa bola, v kelajuan bola, z pergeseran vertikal bola di atas titik O. Syarat awal bahwa $v = 0$ mengharuskan $z = a - 2a\cos\alpha$, sehingga $E = mga(1 - 2\cos\alpha)$ dan persamaan kekekalan energi di atas menjadi berbentuk

$$v^2 + 2gz = 2ga(1 - 2\cos\alpha) \qquad \text{(2 poin)}$$

Khususnya, saat bola berada di titik B, $z = a/\sqrt{3}$ dan $v^2 = ag/\sqrt{3}$ sehingga diperoleh

$$\frac{ag}{\sqrt{3}} + \frac{2ga}{\sqrt{3}} = 2ga(1 - 2\cos\alpha_0) \quad \text{atau} \quad \cos\alpha_0 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3}), \qquad \text{(2 poin)}$$

sehingga $\alpha_0 = \cos^{-1}(\frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})) \approx 86^0$ (2 poin)