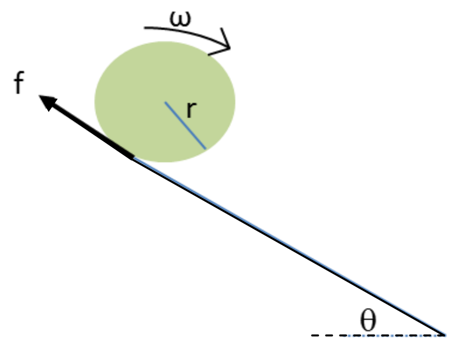
1. (**12 poin**) Tinjau sebuah bola salju yang sedang menggelinding. Seperti kita tahu, fenomena menggelindingnya bola salju diikuti oleh pertambahan massa bola tersebut. Biarpun massa bertambah, kita asumsikan bahwa bola salju selalu berbentuk bola sempurna, memiliki rapat massa persatuan volum ρ yang konstan, dan selalu menggelinding tanpa slip.
Sekarang, kita akan meninjau bola salju yang berjari-jari sesaat r, dan kecepatan sudut sesaat ω, serta gaya gesek sesaat f, menggelinding pada sebuah bidang dengan kemiringan θ (lihat gambar). Tentukan :



   a) besar gaya total (dgn arah sejajar bidang)
   b) besar torsi total (di pusat massa bola)
   c) persamaan gerak bola salju! Ini disebut sebagai SSBE (*simple snow ball equation*). Nyatakan SSBE dalam θ, r, ω, dan t!

   Untuk memudahkan perhitungan, selanjutnya kalian tinjau bola salju tersebut menggelinding pada sebuah bidang datar.

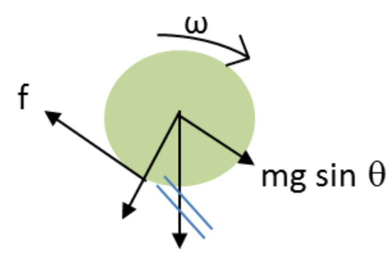
   d) Jika kecepatan sudut awal adalah ω_o (dan sudah tidak slip tentunya) dan jari-jari bola awal adalah R_o, tentukan jari-jari bola salju sebagai fungsi kecepatan sudut!

   Untuk mudahnya, diasumsikan bahwa setiap bergesekan dengan tanah, massa bola akan bertambah dengan konstan sehingga $dm/dx = K$ = konstan.

   e) Tentukan kecepatan sudut sebagai fungsi waktu (nyatakan dalam K, ρ, R_o *dan* ω_o)!

Jawab:

a) Kita tahu, bahwa gaya yang bekerja adalah gaya gesek dan proyeksi gaya berat



$\sum F = mg\sin\vartheta - f$ ......(1) (**0,5 poin**)

$m = \rho V = \rho(4/3)\pi r^3$ .....(2) (**0,5 poin**)

Subtitusi (2) ke (1) didapat : (**0,5 poin**)

$\boldsymbol{\sum F = (4/3)\rho\pi r^3 g\sin\vartheta - f}$ **.......(3)** **(ANSWER)** (**0,5 poin**)

b) Kita tahu, bahwa torsi yang bekerja pada pusat massa bola hanyalah gaya gesek

$\sum \tau = f.r$ ……(4) (ANSWER) (**1 poin**)

c) Karena bola selalu tidak slip, maka :

$v = \omega r$ ……(5) (**0,5 poin**)

Momentum $P = mv$

subtitusi (2) dan (5) menghasilkan : $P = (4/3)\,\rho\pi r^4\omega$ ……(6) (**0,5 poin**)

Momentum sudut $L = I\omega$,

untuk bola $I = (2/5)mr^2$, maka, subtitusi pers (2) : $L = (8/15)\,\rho\pi r^5\omega$ ……(7) (**0,5 poin**)

Dari hukum Newton II bahwa :

$\sum F = \frac{dP}{dt}$ ……(8) (**0,5 poin**) dan $\sum\tau = \frac{dL}{dt}$ ……..(9) (**0,5 poin**)

Mensubtitusi (3) ke persamaan (8) serta (4) ke persamaan (9), didapat :

(8)*……. $(4/3)\rho\pi r^3 g\sin\vartheta - f = \frac{dP}{dt}$ (**0,5 poin**)

(9)*……. $f = \frac{1}{r}\frac{dL}{dt}$ (**0,5 poin**)

Eliminasi f dengan menjumlahkan (8)* dan (9)*, serta mensubtitusi persamaan (6) dan (7), kemudian sederhanakan untuk menghasilkan SSBE :

$$\boxed{g\sin\theta = 6\omega\frac{dr}{dt} + \frac{7}{5}r\frac{d\omega}{dt}}$$

(ANSWER) (**0,5 poin**)

d) Substitusi $\theta = 0$ ke SSBE menghasilkan : (**0,5 poin**)

$-6\frac{dr}{r} = \frac{7}{5}\frac{d\omega}{\omega}$ …….(10) (**0,5 poin**)

Integralkan kedua ruas dan memasukkan kondisi awal R_o dan ω_o sehingga menghasilkan:

$$r = R_o\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^{7/30}$$

……(11) (ANSWER) (**1 poin**)

e) Kita tahu bahwa :

$dx = v\,dt = \omega r\,dt$ ……(12) (**0,5 poin**)

Turunkan/differensialkan persamaan (2) terhadap jarak menghasilkan :

$4\rho\pi r^2\,(dr/dx) = K$ maka $dr/r = K\,dx\,/\,(4\rho\pi r^3)$ (**0,5 poin**)

Subtitusikan pers. (12) diperoleh :

$dr/r = K\omega\,dt\,/\,(4\rho\pi r^2)$ …….(13) (**0,5 poin**)

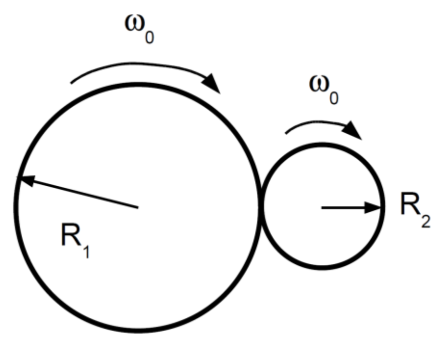
Subtitusi (13) dan (11) ke (10) dan sederhanakan untuk menghasilkan :

$$-\frac{15}{14}\frac{Kdt}{\rho\pi\,{R_o}^2\,{\omega_o}^{7/15}} = \frac{d\omega}{\omega^{37/15}}$$ (**0,5 poin**)

Integralkan kedua ruas dan masukkan kondisi awal $t = 0$ dan ω_o menghasilkan:

$$\boldsymbol{\omega = \omega_o\,[1 + \frac{11}{7}\frac{K\omega_o t}{\rho\pi\,{R_o}^2}]^{-15/22}}$$ **(ANSWER)** (**1 poin**)

2. **[12 poin]** Gambar ini menampilkan dua benda silinder tegak dengan kedua sumbunya paralel satu sama lain dan mula-mula secara terpisah masing-masing silinder tersebut sedang berotasi (*spinning*) ke arah yang sama dengan kecepatan sudut ω_0 . Kedua silinder tersebut kemudian secara perlahan disentuhkan satu sama lain sehingga pada awalnya keduanya saling mengalami *sliding* dengan gaya normal konstan N. Koefisien gesek antara permukaan-permukaan kedua silinder adalah μ. Diketahui silinder dengan jari-jari R_1 memiliki momen inersia I_1 dan silinder dengan jari-jari R_2 memiliki momen inersia I_2.



(a) Gambarkan gaya-gaya yang bekerja pada kedua silinder. Tuliskan persamaan gerak (hukum kedua Newton tentang rotasi) untuk masing-masing silinder. [3 poin]

(b) Tentukan syarat/kondisi agar kedua permukaan silinder berhenti untuk tidak mengalami *sliding* lagi pada saat/waktu $t = t_a$. Tentukan nilai t_a tersebut. Tentukan kecepatan sudut akhir kedua silinder, yaitu ω_{1a} dan ω_{2a} . [3 poin]

Sekarang anggap kedua silinder bermassa sama, yaitu M. Silinder pertama merupakan silinder pejal dengan jari-jari $R_1 = 2R$ dan silinder kedua merupakan silinder kosong berdinding tipis dengan jari-jari $R_2 = R$.

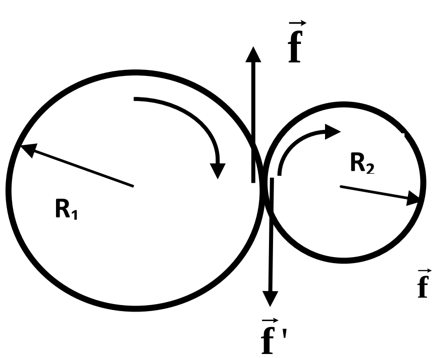
(c) Tuliskan momen inersia masing-masing silinder. [1,5 poin]

(d) Tentukan kecepatan sudut masing-masing silinder sebagai fungsi waktu t, yaitu $\omega_1(t)$ dan $\omega_2(t)$. Gambarkan skets grafik $\omega_1(t)$ dan $\omega_2(t)$. [1,5 poin]

(e) Tentukan besar energi yang hilang sebagai akibat kedua silinder bergesekan. [3 poin]

<u>Jawab</u>:

(a) Gambar gaya-gaya yang bekerja pada kedua silinder :



(**1 poin**)

$\vec{f} = -\vec{f}\,'$ $\quad |\vec{f}| = \mu N$ saat kedua silinder sedang *sliding*

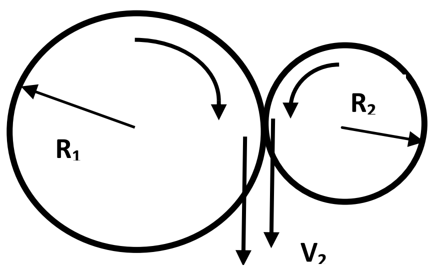
Kedua silinder mengalami *sliding* dan momen gaya (torka) yang berasal dari gaya gesek yang berperan mengerem gerak rotasi kedua silinder, sehingga persamaan gerak (hukum kedua Newton untuk gerak rotasi) untuk masing-masing silinder adalah :

$$\text{Silinder 1:} \qquad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -R_1 \mu N \qquad \textbf{(1 poin)}$$

(1)

$$\text{Silinder 2:} \qquad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -R_2 \mu N \qquad \textbf{(1 poin)}$$

(b)



Kedua silinder akan mulai berhenti sliding pada waktu $t = t_a$ yaitu saat titik-titik kontak keduanya bergerak dengan kecepatan linear yang sama, yaitu $v_1 = v_2$, sehingga berlaku

$$|\omega_1 R_1| = |\omega_2 R_2| \qquad \textbf{(1 poin)}$$

dimana disini salah satu ω_1 atau ω_2 akan bernilai negatif, yang menurut pers. (1) akan tergantung pada tanda dari $\frac{R_1}{I_1} - \frac{R_2}{I_2}$. Akibatnya solusi pers. (1) adalah :

$$\omega_1(t) = \omega_0 - \frac{\mu N R_1}{I_1} t \ ,$$
$$\omega_2(t) = \omega_0 - \frac{\mu N R_2}{I_2} t \ . \qquad (2)$$

Mencari nilai t_a tersebut dan kecepatan sudut akhir kedua silinder, yaitu ω_{1a} dan ω_{2a} :

Pada keadaan tersebut berlaku kaitan :

$$R_1 \omega_1(t) = R_2 \omega_2(t) \qquad \text{(pada saat } t = t_a \text{)}$$

sehingga

$$\left|R_1\omega_0 - \frac{\mu N R_1{}^2}{I_1} t_a\right| = \left|R_2\omega_0 - \frac{\mu N R_2{}^2}{I_2} t_a\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad (R_1 \mp R_2)\omega_0 = \left(\frac{\mu N R_1{}^2}{I_1} \mp \frac{\mu N R_2{}^2}{I_2}\right) t_a$$ (disini harus dipilih "–" bila $\frac{R_1}{I_1} > \frac{R_2}{I_2}$).

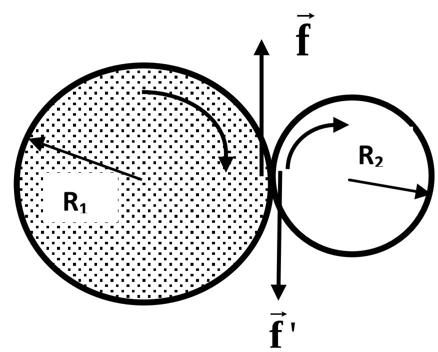
Dengan demikian,

$$\boxed{t_a = \frac{(R_1 \mp R_2)\omega_0}{\mu N\left(\frac{R_1{}^2}{I_1} \mp \frac{R_2{}^2}{I_2}\right)}} \qquad (3)$$ (**1 poin**)

Dan substitusi pers. (3) ke dalam pers. (2) menghasilkan

$$\boxed{\omega_{1a} = \omega_0 - \frac{R_1}{I_1}\frac{(R_1 \mp R_2)\omega_0}{\frac{R_1{}^2}{I_1} \mp \frac{R_2{}^2}{I_2}} \quad , \quad \omega_{2a} = \omega_0 - \frac{R_2}{I_2}\frac{(R_1 \mp R_2)\omega_0}{\frac{R_1{}^2}{I_1} \mp \frac{R_2{}^2}{I_2}}}$$ (**1 poin**)

Sekarang dianggap kedua silinder bermassa sama, yaitu *M*. Silinder pertama merupakan silinder pejal dengan jari-jari $R_1 = 2R$ dan silinder kedua merupakan silinder kosong berdinding tipis dengan jari-jari $R_2 = R$.



(c) Momen inersia masing-masing silinder :

$$I_1 = \frac{1}{2}MR_1{}^2 = \frac{1}{2}M(2R)^2 = 2MR^2 \quad , \quad I_2 = MR_2{}^2 = MR^2$$ (**1 poin**)

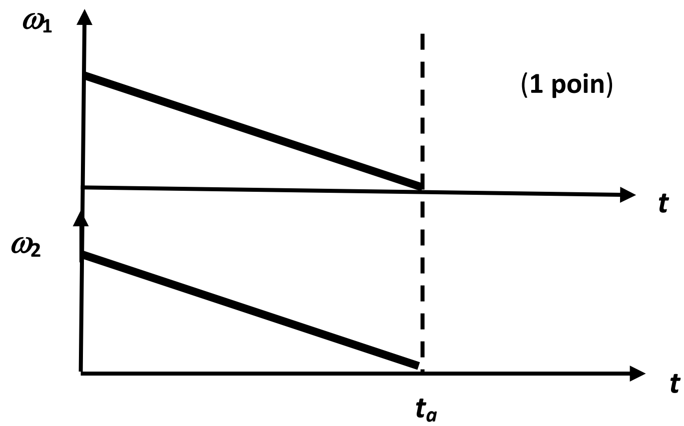
(d) Selanjutnya akan ditentukan kecepatan sudut masing-masing silinder sebagai fungsi waktu *t*, yaitu $\omega_1(t)$ dan $\omega_2(t)$. Gambarkan skets grafik $\omega_1(t)$ dan $\omega_2(t)$

Untuk kasus khusus di atas, persamaan gerak (2) di atas berubah menjadi :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= \omega_0 - \frac{\mu N(2R)}{2MR^2}t = \omega_0 - \frac{\mu N}{MR}t \\ \omega_2(t) &= \omega_0 - \frac{\mu NR}{MR^2}t = \omega_0 - \frac{\mu N}{MR}t\,. \end{aligned}}$$ (**1 poin**)

sehingga $\frac{R_1}{I_1} - \frac{R_2}{I_2} = 0$ yang bermakna bahwa kedua silinder akan berhenti total pada waktu yang sama, yaitu pada saat $t = t_a = \frac{\omega_0 MR}{\mu N}$.

Gambar skets grafik $\omega_1(t)$ dan $\omega_2(t)$:



(**1 poin**)

(e) Menentukan besar energi yang hilang sebagai akibat kedua silinder bergesekan :
Disini, yang hilang adalah semua energi kinetik kedua silinder, sehingga

$$Q = \Delta E_k = E_k^{\,awal} - E_k^{\,akhir}$$ (**1 poin**)

$$= \frac{1}{2} I_1 \omega_0^{\;2} + \frac{1}{2} I_2 \omega_0^{\;2} - 0 = \frac{1}{2}(2MR^2)\omega_0^{\;2} + \frac{1}{2}(MR^2)\omega_0^{\;2}$$ (**1 poin**)

$$= \frac{3}{2} MR^2 \omega_0^{\;2}$$

$$\boxed{Q = \Delta E_k = \frac{3}{2} MR^2 \omega_0^{\;2}}$$ (**1 poin**)

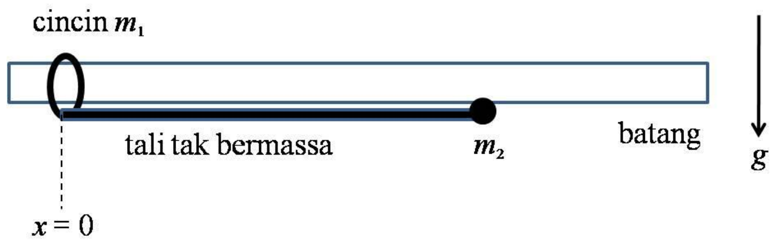
3. (**14 poin**) Sebuah cincin bermassa m_1 dapat bergerak bebas sepanjang batang licin horisontal. Sebuah partikel bermassa m_2 dihubungkan dengan cincin melalui tali tegar tak bermassa. Mula-mula partikel m_2 bersentuhan dengan batang, kemudian dilepas karena pengaruh gravitasi g. Setelah dilepas, ketika cincin tersebut telah bergeser sejauh x, sudut yang dibentuk antara tali dengan batang horisontal adalah θ.

   Tentukan:

   a. Posisi x dinyatakan dalam sudut θ.

   b. Persamaan gerak untuk θ (tidak mengandung variabel x beserta turunannya).

   c. Tentukan besar tegangan batang dan gaya normal pada cincin untuk θ = 30°.



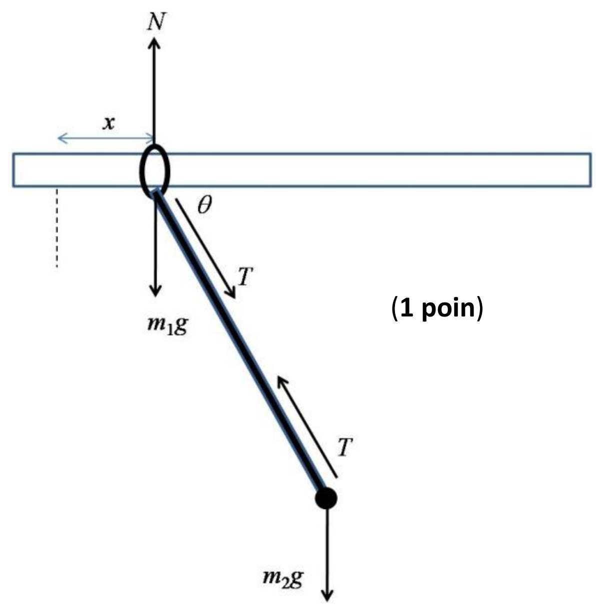
Jawab:

Vektor posisi, kecepatan, percepatan dan gaya untuk m_1 dan m_2 berturut-turut adalah:

$$r_1 = (x, y) = (x, 0)$$
$$v_1 = (\dot{x}, 0)$$
$$a_1 = (\ddot{x}, 0)$$
$$F_1 = (T\cos\theta, N - T\sin\theta - m_1 g)$$

$$r_2 = (x + L\cos\theta, -L\sin\theta)$$
$$v_2 = (\dot{x} - L\omega\sin\theta, -L\omega\cos\theta)$$
$$a_2 = (\ddot{x} - L(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta), -L(\alpha\cos\theta - \omega^2\sin\theta))$$
$$F_2 = (-T\cos\theta, T\sin\theta - m_2 g)$$

Disini, $\omega = \dot{\theta}$ dan $\alpha = \ddot{\theta}$.



(**1 poin**)

a. Persamaan gaya pada arah x untuk m_1 dan m_2 adalah

$$T\cos\theta = m_1\ddot{x} \qquad (1)$$

$$-T\cos\theta = m_2(\ddot{x} - L(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)) \qquad (2)$$

Penjumlahan (1) dan (2) menghasilkan persamaan gaya pada arah x

$$m_1\ddot{x} + m_2[\ddot{x} - L(\alpha\sin\theta + \omega^2\cos\theta)] = 0 \qquad (3)$$

Jika (3) diintegralkan, hasilnya persamaan kekekalan momentum pada arah *x*, yaitu

$$m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}-L\omega\sin\theta)= \text{ konstan.} \tag{4}$$

Untuk mencari nilai konstan tersebut, pada saat awal $v_{x1}=\dot{x}=0$ dan θ= 0 sehingga nilai konstan tersebut sama dengan nol.

$$m_1\dot{x}+m_2(\dot{x}-L\omega\sin\theta)=0 \qquad \textbf{(1 poin)} \tag{5}$$

Jika diintegralkan lagi, maka menjadi persamaan posisi pusat massa pada arah *x*, yaitu

$$m_1 x+m_2(x+L\cos\theta)=\text{konstan.} \tag{6}$$

Pada saat awal, *x* = 0 dan θ= 0 sehingga nilai konstan tersebut sama dengan m_2L . Jadi

$$m_1 x+m_2(x+L\cos\theta)=m_2L$$

SOLUSI $$x=\frac{m_2L}{m_1+m_2}(1-\cos\theta) \qquad \textbf{(2 poin)} \tag{7}$$

b. Jika persamaan (7) diturunkan satu kali dan dua kali terhadap waktu diperoleh

$$\dot{x}=\frac{m_2L}{m_1+m_2}\omega\sin\theta \tag{8}$$

$$\ddot{x}=\frac{m_2L}{m_1+m_2}(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta) \qquad \textbf{(1 poin)} \tag{9}$$

Persamaan gaya arah *x* untuk m_1 dan arah *y* untuk m_2 berturut-turut adalah

$$T\cos\theta=m_1\ddot{x} \tag{10}$$

$$T\sin\theta-m_2g=-m_2L(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta) \qquad \textbf{(1 poin)} \tag{11}$$

Jika persamaan (10) dikalikan sinθ, sedangkan persamaan (11) dikalikan –cosθ kemudian dijumlahkan, diperoleh

$$m_2g\cos\theta=m_1\ddot{x}\sin\theta+m_2L\cos\theta(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta) \tag{12}$$

Substitusi persamaan (9) ke persamaan (12) menghasilkan

SOLUSI $$L[(m_1+m_2\cos^2\theta)\alpha-m_2\omega^2\sin\theta\cos\theta]-(m_1+m_2)g\cos\theta=0 \tag{13}$$

Alternatif lain persamaan dari kekekalan energi mekanik (lihat persamaan 17) adalah

SOLUSI $$\omega^2=\frac{2(m_1+m_2)\sin^2\theta}{m_1+m_2\cos^2\theta}\frac{g}{L} \tag{13b}$$

Alternatif lain persamaan gerak dengan menggabungkan antara (13a) dan (13b) adalah

SOLUSI $$\alpha=\frac{(m_1+m_2)(m_1+m_2(1+\sin^2\theta))\cos\theta}{(m_1+m_2\cos^2\theta)^2}\frac{g}{L} \tag{13c}$$

(**2 poin**)

c. Karena sistem tidak ada gesekan maka energi mekanik sistem konstan. Energi kinetik sistem adalah

$$EK = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 [(\dot{x} - L\omega \sin\theta)^2 + (-L\omega\cos\theta)^2]$$

$$EK = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (-2L\omega\dot{x}\sin\theta + L^2\omega^2) \qquad (14)$$

Substitusi persamaan (8) dan (9) ke dalam persamaan (14) menghasilkan

$$EK = \tfrac{1}{2} m_2 L^2 \omega^2 \left(1 - \frac{m_2 \sin^2\theta}{(m_1 + m_2)}\right)$$ (**1 poin**) (15)

Adapun energi potensial sistem adalah $EP = -m_2 g L \sin\theta$ sehingga energi mekanik sistem adalah (**0,5 poin**)

$$EM = \tfrac{1}{2} m_2 L^2 \omega^2 \left(1 - \frac{m_2 \sin^2\theta}{(m_1 + m_2)}\right) - m_2 g L \sin\theta \qquad (16)$$

Pada saat awal, ω = 0 dan θ = 0 sehingga *EM* = 0. Jadi

$$EM = \tfrac{1}{2} m_2 L^2 \omega^2 \left(1 - \frac{m_2 \sin^2\theta}{(m_1 + m_2)}\right) - m_2 g L \sin\theta = 0$$ (**0,5 poin**) (17)

Dari persamaan (17), nilai ω^2 untuk sudut θ = 30 adalah

$$\omega^2 = \frac{4m_1 + 4m_2}{4m_1 + 3m_2} \frac{g}{L}$$ (**0,5 poin**) (18)

Dari persamaan (18), maka nilai α untuk sudut θ = 30 adalah

$$L[(m_1 + \tfrac{3}{4} m_2)\alpha - m_2 \frac{4m_1 + 4m_2}{4m_1 + 3m_2} \frac{g}{L} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{3}] - (m_1 + m_2) g . \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}(m_1 + m_2)(4m_1 + 5m_2)}{(4m_1 + 3m_2)^2} \frac{g}{L}$$ (**0,5 poin**) (19)

Akhirnya dengan substitusi persamaan (18) dan (19) ke dalam persamaan (11) untuk sudut θ = 30 diperoleh

$$\tfrac{1}{2} T - m_2 g = -m_2 L \left(\frac{2\sqrt{3}(m_1 + m_2)(4m_1 + 5m_2)}{(4m_1 + 3m_2)^2} \frac{g}{L} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4m_1 + 4m_2}{4m_1 + 3m_2} \frac{g}{L} . \frac{1}{2}\right)$$

Besar tegangan tali saat sudut θ = 30 adalah

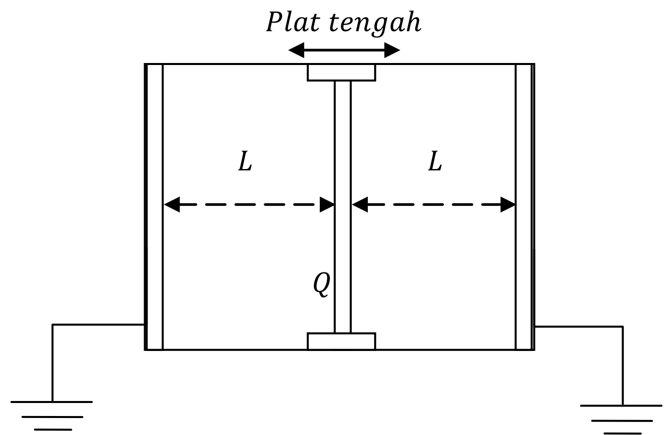
SOLUSI $$T = \frac{2m_1 m_2 (12m_1 + 11m_2)}{(4m_1 + 3m_2)^2} g$$ (**1,5 poin**) (20)

Besar gaya Normal pada m_1 untuk sudut θ = 30 adalah

$$N - T\sin\theta - m_1 g = 0$$

SOLUSI $$N = \tfrac{1}{2} T + m_1 g = m_1 g \left(1 + \frac{m_2 (12m_1 + 11m_2)}{(4m_1 + 3m_2)^2}\right)$$ (**1,5 poin**) (21)

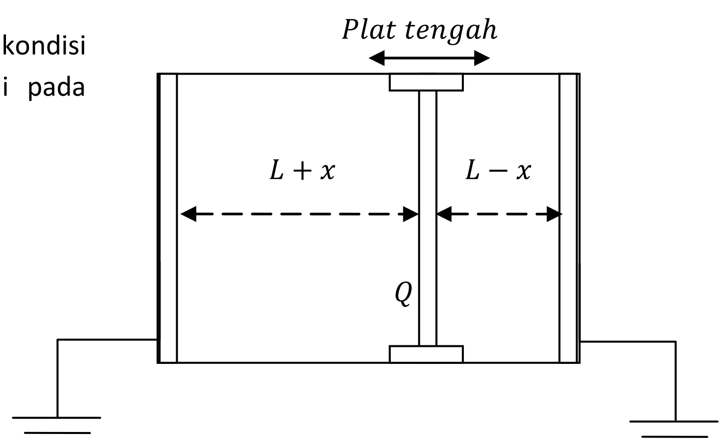
4. (**14 poin**) Terdapat 3 buah plat dengan luas penampang A tersusun seperti gambar dibawah (tampak atas). Plat tengah memiliki muatan listrik yang terdistribusi merata sebesar Q dan ia bisa bergerak bebas tanpa gesekan ke kanan dan ke kiri, sedangkan plat di sebelah kiri dan kanan dihubungkan ke ground dan fix (diam). Pada kondisi awal, plat tengah tepat berada pada jarak L dari plat kanan maupun kiri. Pada kedua ruangan yang dibentuk di sisi kanan dan kiri terdapat udara (anggap permitivitasnya sama dengan ruang hampa = ϵ_0) yang memiliki tekanan masing-masing sebesar p_0. Kondisi ini merupakan kondisi dimana plat tengah berada pada kondisi kesetimbangan labil. Anggap tidak ada celah yang mengakibatkan udara di sebelah kanan dan kiri saling mengalir atau pun keluar dari sistem. Tentukanlah:



   a. Dimana plat mengalami kondisi kesetimbangan stabil (x) dihitung dari posisi plat pada kondisi kesetimbangan labil!
   b. Jika pada posisi kesetimbangan stabil tersebut, plat tengah diganggu dengan simpangan Δx (dimana $\Delta x \ll x, dan\ \Delta x \ll L$), maka tentukan frekuensi osilasi plat tengah! (Hint : konsep termodinamik tidak dibutuhkan untuk menyelesaikan soal ini)

Solusi :

a. Gambar ketika sistem berada pada kondisi kesetimbangan stabil (misal terjadi pada saat plat tengah bergeser sejauh x)



- Kapasitansi total dari ruang yang dibentuk oleh plat kiri + tengah dan plat kanan + tengah (kombinasi kedua kapasitor adalah paralel, mengingat kedua plat kiri dan kanan mempunyai potensial yang sama)

$$C = \frac{\epsilon_0 \mathrm{A}}{\mathrm{L} - \mathrm{x}} + \frac{\epsilon_0 \mathrm{A}}{\mathrm{L} + \mathrm{x}}$$

$$C = \frac{2\epsilon_0 AL}{L^2 - x^2}$$ **(0,5 poin)**

- Energi elektrostatik yang dimiliki sistem

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$ **(0,5 poin)**

$$W = \frac{Q^2(L^2 - x^2)}{4\epsilon_0 AL}$$ **(0,5 poin)**

- Gaya elektrostatik yang dirasakan

$$F = -\frac{dW}{dx}$$ **(0,5 poin)**

$$F = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 AL}$$ **(0,5 poin)**

- Karena plat mendistribusikan muatan secara merata, maka ia konduktor listrik (yang notabennya konduktor listrik merupakan konduktor panas juga), maka tekanan tidak terpengaruh suhu, hanya berbanding terbalik dengan volume. Mengingat luas plat tidak berubah, maka tekanan berbanding terbalik dengan jarak antar plat

$$p \sim \frac{1}{l}$$ **(0,5 poin)**

- Tekanan udara plat kanan dan kiri pada kondisi plat tengah tergeser sejauh x ke kanan

$$p_{kanan} = \frac{p_o L}{L - x}$$ **(0,5 poin)**

$$p_{kiri} = \frac{p_o L}{L + x}$$ **(0,5 poin)**

- Pada kesetimbangan stabil, gaya elektrostatis diimbangi oleh gaya yang disebabkan oleh adanya perbedaan tekanan udara

$$F = (p_{kanan} - p_{kiri})A$$ **(0,5 poin)**

$$\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 AL} = \left(\frac{p_o L}{L - x} - \frac{p_o L}{L + x}\right)A$$

$$\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 AL} = \frac{2p_0 LxA}{L^2 - x^2}$$ **(0,5 poin)**

- Nilai x merupakan solusi dari persamaan kuadrat tersebut, yaitu :

$$\boldsymbol{x = \pm L\sqrt{1 - \frac{4\epsilon_0 p_0 A^2}{Q^2}}}$$ **(1 poin)**

b. Ketika plat tengah diganggu dengan simpangan sejauh Δx, maka persamaan gayanya sekarang :

$$\frac{Q^2(x + \Delta x)}{2\epsilon_0 AL} - \frac{2p_0 LA(x + \Delta x)}{L^2 - (x + \Delta x)^2} = m\Delta\ddot{x}$$ **(0,5 poin)**

- Lihat ekspresi $(x + \Delta x)^2$, karena $\Delta x \ll x$, maka **(0,5 poin)**

$$(x + \Delta x)^2 = x^2\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^2 \approx x^2\left(\frac{2\Delta x}{x}\right) = 2x\Delta x$$ **(0,5 poin)**

- Persamaan gayanya menjadi

$$\frac{Q^2(x+\Delta x)}{2\epsilon_0 AL} - 2p_0 LA(x+\Delta x)\frac{1}{L^2-2x\Delta x} = m\ddot{\Delta x} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Lihat ekspresi $\frac{1}{L^2-2x\Delta x}$, karena $\Delta x \ll L$, maka **(0,5 poin)**

$$\frac{1}{L^2-2x\Delta x} = \frac{1}{L^2}\left(1-\frac{2x\Delta x}{L^2}\right)^{-1} \approx \frac{2x\Delta x}{L^4} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Persamaan gayanya menjadi

$$\frac{Q^2(x+\Delta x)}{2\epsilon_0 AL} - 2p_0 LA(x+\Delta x)\frac{2x\Delta x}{L^4} = m\ddot{\Delta x} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 AL} + \frac{Q^2\Delta x}{2\epsilon_0 AL} - \frac{4p_0 Ax^2\Delta x}{L^3} - \frac{4p_0 Ax\Delta x^2}{L^3} = m\ddot{\Delta x} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Kita bisa mengambil suku $-\frac{4p_0 Ax\Delta x^2}{L^3} \approx 0$, karena $\Delta x \ll L$ **(0,5 poin)**

$$\frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 AL} + \frac{Q^2\Delta x}{2\epsilon_0 AL} - \frac{4p_0 Ax^2\Delta x}{L^3} = m\ddot{\Delta x} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$\frac{Q^2 x}{2m\epsilon_0 AL} = \ddot{\Delta x} + \left(\frac{4p_0 Ax^2}{mL^3} - \frac{Q^2}{2m\epsilon_0 AL}\right)\Delta x \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Kita bisa menuliskan $\frac{Q^2 x}{2m\epsilon_0 AL} = k$, dimana k adalah sebuah konstanta

$$k = \ddot{\Delta x} + \left(\frac{4p_0 Ax^2}{mL^3} - \frac{Q^2}{2m\epsilon_0 AL}\right)\Delta x \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Ini merupakan persamaan osilasi dengan

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{4p_0 Ax^2}{mL^3} - \frac{Q^2}{2m\epsilon_0 AL}\right)} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Dengan memasukan nilai x, dari soal a, maka

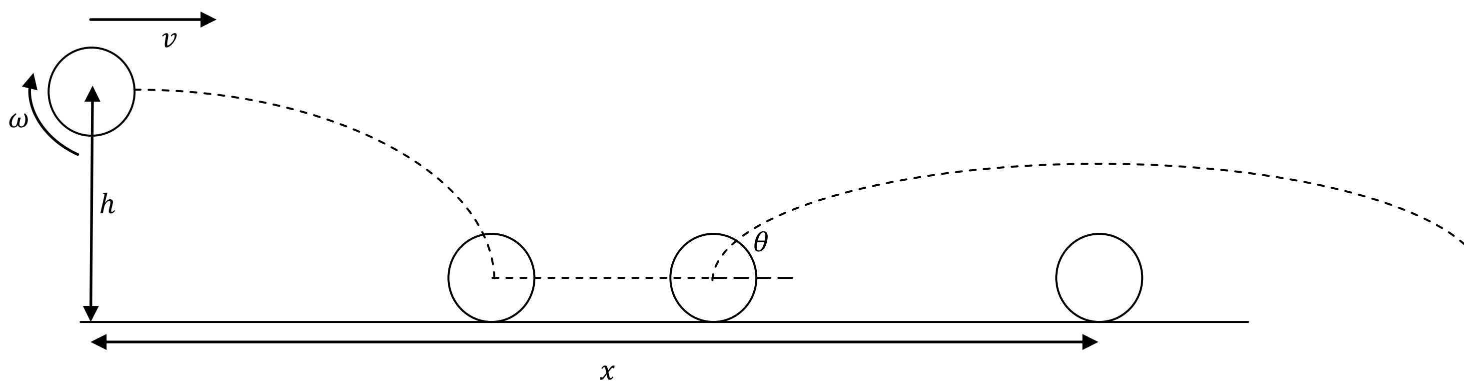
$$\omega = \sqrt{\frac{4p_0 AL^2\left(1-\frac{4\epsilon_0 p_0 A^2}{Q^2}\right)}{mL^3} - \frac{Q^2}{2m\epsilon_0 AL}} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4p_0 A}{mL} - \frac{16p_0^2\epsilon_0 A^3}{mLQ^2} - \frac{Q^2}{2m\epsilon_0 AL}} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{8p_0 A^2\epsilon_0 Q^2 - (32p_0^2\epsilon_0^2 A^4 + Q^4)}{2mLQ^2\epsilon_0 A}}} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Keterangan : k tidak mempengaruhi nilai frekuensi osilasi, melainkan hanya berkontribusi dalam perhitungan titik setimbang osilasi

5. (**18 poin**) Sebuah bola basket berjari-jari r (anggap saja bola berongga), dilempar oleh seseorang dengan kecepatan horizontal v dan kecepatan sudut ω (dimana $\omega r < v$) dari ketinggian h (lihat gambar). Bola basket tersebut memantul secara vertikal pada lantai dengan koefisien pantul e. Namun sebelum memantul, bola tersebut bergerak slip dengan waktu yang singkat. Tepat ketika bola mulai menggelinding sempurna, ia memantul dan membuat gerak parabola. Tentukanlah :



a. (**5 poin**) Sudut pantul (θ) yang terbentuk tepat setelah bola menggelinding sempurna!
b. (**5 poin**) Jumlah putaran (n)yang dialami bola tersebut selama bersentuhan dengan lantai!
c. (**8 poin**) Jarak total (x) yang ditempuh bola hingga menyelesaikan gerak parabolanya!

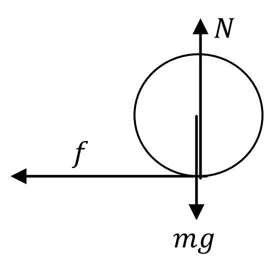
Jawab:

a. Sudut pantul.
   - Kelajuan setelah memantul pada arah y :

$$v_y' = ev_y \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$v_y' = e\sqrt{2g(h-r)} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

   - Gerak slip :



Dari persamaan gaya

$$-f = ma \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$-f = \frac{m(v_t - v)}{t} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

Dari persamaan torsi

$$fr = I\alpha \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$fr = \frac{2}{3}mr^2\frac{(\omega_t - \omega)}{t} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$-\frac{2}{3}mr\frac{(\omega_t-\omega)}{t}=\frac{m(v_t-v)}{t}$$

$$-\frac{2}{3}r\omega_t+\frac{2}{3}r\omega=v_t-v$$ (**0,5 poin**)

Syarat ketika bergerak menggelinding sempurna

$$\omega_t r=v_t$$ (**0,5 poin**)

$$-\frac{2}{3}v_t+\frac{2}{3}r\omega=v_t-v$$

$$v+\frac{2}{3}r\omega=\frac{5}{3}v_t$$

$$v_t=\frac{3v+2r\omega}{5}\quad(kecepatan\ arah\ x)$$ (**0,5 poin**)

Sudut pantul

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_t}=\frac{5e\sqrt{2g(h-r)}}{3v+2r\omega}$$ (**0,5 poin**)

$$\boldsymbol{\theta=\arctan\left(\frac{5e\sqrt{2g(h-r)}}{3v+2r\omega}\right)}$$

b. Jumlah putaran

- Sudut putaran yang ditempuh

$$\theta=\omega t+\frac{1}{2}\alpha t^2=\left(\omega+\frac{1}{2}\alpha t\right)t$$ (**0,5 poin**)

- Mencari waktu

  Dari persamaan gaya

$$-\mu mg=ma$$

$$-\mu mg=\frac{m(v_t-v)}{t}$$ (**0,5 poin**)

$$t=\frac{m(v-v_t)}{\mu mg}$$

$$t=\frac{\left(v-\frac{3v+2r\omega}{5}\right)}{\mu g}$$

$$t=\frac{\left(\frac{2}{5}v-\frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g}$$ (**0,5 poin**)

- Mencari percepatan sudut

  Dari persamaan torsi

$$fr=I\alpha$$ (**0,5 poin**)

$$\mu mgr=\frac{2}{3}mr^2\alpha$$

$$\alpha=\frac{3\mu g}{2r}$$ (**0,5 poin**)

  Masukan ke persamaan mencari sudut sebelumnya

$$\theta=\left(\omega+\frac{1}{2}\alpha t\right)t$$

$$\theta = \left(\omega + \frac{1}{2}\frac{3\mu g}{2r}\frac{\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g}\right)\frac{\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g}$$ **(0,5 poin)**

$$\theta = \left(\omega + \frac{3}{4r}\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)\right)\frac{\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g}$$

$$\theta = \frac{2}{5\mu g}\left(\frac{3}{5}\omega + \frac{3v}{10r}\right)(v - \omega r)$$ **(0,5 poin)**

$$\theta = \frac{3}{25\mu g r}(2\omega r + v)(v - \omega r)$$

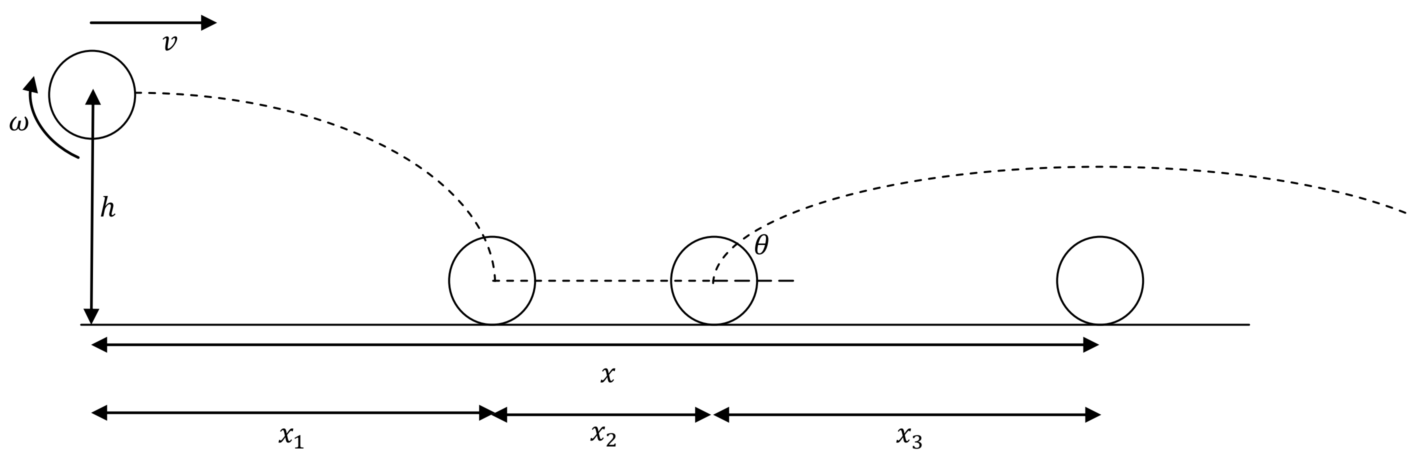
$$\theta = \frac{3}{25\mu g}(v^2 - 2\omega^2 r^2 + v\omega r)$$ **(0,5 poin)**

Hubungan putaran dan sudut

$$n = \frac{\theta}{2\pi}$$ **(0,5 poin)**

$$\boldsymbol{n = \frac{3}{25\mu g\pi}\left(v^2 - 2\omega^2 r^2 + v\omega r\right)}$$ **(0,5 poin)**

c. Jarak total



- Jarak mendatar gerak setengah parabola
  Waktu jatuh

$$h - r = \frac{1}{2}g{t_1}^2$$ **(0,5 poin)**

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$$ **(0,5 poin)**

$$x_1 = vt_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$$ **(1,0 poin)**

- Jarak mendatar gerak slip

$$x_2 = vt + \frac{1}{2}at^2 = \left(v + \frac{1}{2}at\right)t$$ **(0,5 poin)**

Percepatan ketika slip

$$-\mu mg = ma$$
$$a = -\mu g \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

$$x_2 = \left(v + \frac{1}{2}(-\mu g)\frac{\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g}\right)\frac{\left(\frac{2}{5}v - \frac{2r\omega}{5}\right)}{\mu g} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$x_2 = \frac{2}{5\mu g}\left(v - \frac{1}{5}v + \frac{1}{5}r\omega\right)(v - r\omega) \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$x_2 = \frac{2}{25\mu g}(4v + r\omega)(v - r\omega)$$
$$x_2 = \frac{2}{25\mu g}(4v^2 - \omega^2 r^2 - 3v\omega r)$$

- Jarak mendatar gerak parabola
  Persamaan parabola

$$y = v_y' t_p - \frac{1}{2} g t_p^2 \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

Ketika bola telah melakukan gerak parabola sepenuhnya, maka $y = 0$

$$0 = v_y' t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$t_3 = \frac{2v_y'}{g}$$
$$t_3 = \frac{2e\sqrt{2g(h-r)}}{g} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$t_3 = 2e\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}}$$

$$x_3 = v_t t_3 \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$x_3 = \left(\frac{3v + 2r\omega}{5}\right) 2e\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$

- Jarak total

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$x = v\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}} + \frac{2}{25\mu g}(4v^2 - \omega^2 r^2 - 3v\omega r) + \left(\frac{3v + 2r\omega}{5}\right) 2e\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$
$$\boldsymbol{x = \left(v\left(1 + \frac{6}{5}e\right) + \frac{4er\omega}{5}\right)\sqrt{\frac{2(h-r)}{g}} + \frac{2}{25\mu g}(4v^2 - \omega^2 r^2 - 3v\omega r)} \qquad \textbf{(0,5 poin)}$$